INTRODUCCIÓN A LA ELECTROACÚSTICA

Federico Miyara

1. Introducción

La electroacústica se ocupa del estudio, análisis, diseño y aplicaciones de dispositivos que involucran la conversión de energía eléctrica en acústica y viceversa, así como de sus componentes asociados. Entre los primeros se encuentran los transductores, tales como micrófonos, acelerómetros, altavoces, excitadores de compresión, auriculares, audífonos, calibradores acústicos y vibradores; y, entre los segundos, los filtros acústicos, los sonodeflectores (bafles), las bocinas y los acopladores acústicos.

Para el análisis de estos componentes se introducirán técnicas de modelado por medio de circuitos mecánicos y acústicos, que podrán resolverse con las técnicas habituales de la teoría de redes eléctricas.

2. Modelos circuitales

Los circuitos eléctricos están formados por diversos componentes eléctricos interconectados, por ejemplo resistores, condensadores, inductores, fuentes de tensión y corriente y transformadores. El comportamiento externo de un circuito eléctrico puede describirse por medio de los valores que asumen en diferentes puntos del circuito dos tipos de variables: la tensión y la corriente. El comportamiento de cada componente individual está determinado por ecuaciones algebraicas o diferenciales que relacionan entre sí una o más tensiones y una o más corrientes, en tanto que la interconexión entre ellos está gobernada por las leyes de Kirchhoff. La combinación de las ecuaciones individuales por medio de las leyes de Kirchhoff proporciona un sistema de ecuaciones diferenciales que, una vez resuelto, permite conocer el estado de régimen de todo el circuito. La introducción del cálculo simbólico por Heaviside y su formalización a través de la transformación de Laplace han permitido reemplazar las ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas cuya resolución se presta admirablemente bien al análisis frecuencial, que es en muchos casos de mayor importancia que el análisis temporal.

Una gran ventaja del enfoque circuital es que, una vez dominada la técnica, es posible plantear las ecuaciones por simple inspección. Otra ventaja es que a lo largo del tiempo se han desarrollado innumerables herramientas que permiten simplificar el análisis y resolución de los diversos circuitos así como obtener información útil sin necesidad de su resolución completa.

Una situación similar puede plantearse en otros tipos de sistemas físicos, como los mecánicos, los acústicos, los térmicos, etc. Existen diversos formalismos para la modelización de sistemas generales, por ejemplo los diagramas de bloques, los grafos y los diagramas de enlace (bond graphs). La aplicación del concepto de circuito a la electroacústica, desarrollado a continuación, tiene la ventaja de llevar al lenguaje propio de la ingeniería electrónica el análisis de componentes y sistemas no eléctricos que interactúan con los bloques funcionales típicos del procesamiento eléctrico o electrónico de señales de audio (amplificadores, filtros, etc.).

2.1. Circuitos mecánicos

Un sistema mecánico está formado, en general, por componentes elementales que se encuadran en una de estas categorías: masa, resorte, fricción y palanca.[1, 2] Para poder representar estos componentes dentro de un circuito mecánico es preciso seleccionar adecuadamente las variables que sustituirán a la tensión y a la corriente. Las variables tradicionales en la mecánica son la fuerza y la posición; parecería, por consiguiente, que estas variables podrían ser apropiadas para su uso en un circuito mecánico. Sin embargo, para que la equivalencia entre los circuitos eléctricos y mecánicos sea más completa, sería deseable que las relaciones de potencia se mantuvieran. Así, en el caso eléctrico, la potencia W_e entregada a un componente al que se aplica una tensión V y por el que circula una corriente I, es el producto de la tensión por la corriente:

$$W_e = V \cdot I. \tag{1}$$

Si la fuerza aplicada a un componente mecánico es F y su posición, X, en cambio, la potencia entregada *no* es el producto de la fuerza por la posición, sino el producto de la fuerza por la velocidad U:[3]

$$W_m = F \cdot U. \tag{2}$$

Debido a que la relación entre la posición y la velocidad es una simple derivada, es sencillo expresar todas las relaciones de la mecánica en términos de la fuerza y la velocidad en lugar de la fuerza y la posición.

Para completar la analogía resta decidir cuál de las variables mecánicas reemplazará a la tensión y cuál a la corriente. Existen dos posibilidades. La primera, denominada *analogía tipo impedancia* es:

$$\begin{aligned} V &\leftrightarrow F \\ I &\leftrightarrow U \end{aligned} \tag{3}$$

La segunda, la *analogía tipo movilidad*, corresponde a

$$\begin{aligned} V &\leftrightarrow U \\ I &\leftrightarrow F \end{aligned} \tag{4}$$

En principio cualquiera de las dos posibilidades es igualmente aceptable. De hecho, aun sin salir del dominio de la electricidad, es posible intercambiar las tensiones y las corrientes, obteniéndose un circuito *dual* en el que los paralelos se convertirán en series y viceversa, los nudos se transformarán en bucles y viceversa y las inductancias se transformarán en capacidades y viceversa. Esta dualidad se ha aprovechado con ventaja, por ejemplo, para transformar filtros pasabajos en pasaaltos y viceversa.

La adopción de una u otra de las posibles analogías termina siendo una cuestión de preferencia personal. Beranek, por ejemplo, sugiere que la fuerza debería corresponder a la corriente y la velocidad a la tensión, dado que es posible medir la velocidad sin interrumpir el circuito, lo cual también acontece con la tensión eléctrica, y, en cambio

---

1 El término "palanca" está utilizado aquí en forma general, incluyendo otras máquinas simples.
2 Cada uno de estos tipos de componentes puede aparecer también en su forma rotativa.
3 Utilizamos la letra U para simbolizar la velocidad para evitar que se confunda con la tensión V.

no es posible medir la fuerza sin interponer un elemento (dinamómetro), de la misma manera que no se puede medir la corriente sin abrir el circuito para interponer un amperímetro (Beranek, 1961). Esta observación, hecha en 1954, ha perdido vigencia, por cuanto hoy es posible medir la corriente por medio de transformadores de intensidad (pinza amperométrica) y es posible medir la fuerza a través de las deformaciones, utilizando dispositivos *strain gauge*.

Preferimos la analogía de impedancia, ya que la fuerza es físicamente más afín al potencial, mientras que, del mismo modo que la corriente es un flujo de carga, la velocidad es un flujo de materia.

En lo que sigue estudiaremos cada uno de los componentes mecánicos citados y mostraremos la forma en que pueden representarse como elementos de circuitos.

2.1.1. Masa mecánica

La ecuación que gobierna el comportamiento dinámico de una masa m es la segunda ley de Newton,

$$f(t) \;=\; m\,a(t). \tag{5}$$

donde f es la fuerza neta que actúa sobre la masa y a es la aceleración que ésta experimenta.[4] Para obtener un modelo circuital debemos expresar esta ley en términos de la fuerza y la velocidad, lo cual puede conseguirse teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada de la velocidad. Resulta:

$$f(t) \;=\; m\,u'(t). \tag{6}$$

Esta ecuación es formalmente análoga a

$$v(t) \;=\; L\,i'(t), \tag{7}$$

lo cual sugiere la analogía entre la masa mecánica y la inductancia eléctrica. Aplicando la transformación de Laplace, la ecuación (6) puede expresarse como

$$F(s) \;=\; ms\,U(s), \tag{8}$$

que corresponde a la versión eléctrica

$$V(s) \;=\; Ls\,I(s). \tag{9}$$

Finalmente, también es posible expresar esta ley en términos de *fasores*, para lo cual suponemos que

$$u(t) \;=\; \dot{U}\,e^{j\omega t}, \tag{10}$$

y

$$f(t) \;=\; \dot{F}\,e^{j\omega t}. \tag{11}$$

4 Como es habitual, utilizaremos letras minúsculas para las magnitudes variables y mayúsculas para sus valores globales (valor de pico, valor eficaz).

Reemplazando en la ecuación (5),

$$\dot{F}\, e^{j\omega t} \;=\; m\,\dot{U}\; j\omega\, e^{j\omega t}\,,$$

de donde

$$\dot{F} \;=\; j\omega m\,\dot{U}\,. \tag{12}$$

Es decir, la fuerza se adelanta un ángulo π/2 con respecto a la velocidad. En la figura 1 se indica la representación circuital de la masa como una inductancia.



Figura 1. Equivalencia circuital correspondiente a la masa mecánica.

2.1.2. Resorte

El comportamiento dinámico de un resorte obedece a la ley de Hooke, según la cual la fuerza f que debe aplicársele para lograr un estiramiento neto x es proporcional a dicho estiramiento:

$$f(t) \;=\; k\,x(t). \tag{13}$$

donde k es la *constante elástica*, que depende de la geometría y del módulo de elasticidad (módulo de Young) del material del que se compone el resorte. Podemos expresar esta ecuación en términos de la velocidad teniendo en cuenta que la posición es la integral de la velocidad:

$$f(t) \;=\; k\int u(t)\,dt\,. \tag{14}$$

Esta ecuación es similar a la forma integral de la ecuación del condensador:

$$v(t) \;=\; \frac{1}{C}\int i(t)\,dt\,, \tag{15}$$

por lo que el resorte se comporta en forma análoga a un condensador. En esta analogía la capacidad C corresponde a la denominada *compliancia mecánica*, $1/k$. Podemos aplicar la transformación de Laplace a la ecuación (14),

$$F(s) \;=\; \frac{k}{s}U(s)\,, \tag{16}$$

que corresponde a

$$V(s) \;=\; \frac{1}{Cs}I(s)\,, \tag{17}$$

En términos de fasores, un razonamiento similar al que condujo a la ecuación (12) nos proporciona

$$\dot{F} = \frac{k}{j\omega}\dot{U}\,. \tag{18}$$

En este caso la fuerza está atrasada un ángulo π/2 con respecto a la velocidad. En la figura 2 se muestra la representación circuital de la compliancia como una capacidad.

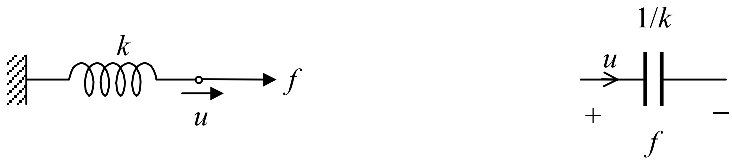


Figura 2. Equivalencia circuital correspondiente a un resorte.

2.1.3. Fricción

La fricción es una interacción disipativa entre cuerpos que obedece a varios mecanismos. Tenemos, por ejemplo, el rozamiento entre sólidos, que es fuertemente no lineal,[5] y la fricción fluida o viscosa entre un sólido y un fluido, que responde, por el contrario, a un comportamiento lineal. En la práctica se presenta en los deslizamientos lubricados. Es ésta la de mayor interés en nuestro caso. Se verifica

$$f(t) = \nu\, u(t). \tag{19}$$

donde ν es el coeficiente de fricción viscosa, que depende del coeficiente de viscosidad η y del espesor de la capa fluida. Esta ley es equivalente a la ley de Ohm:

$$v(t) = R\, i(t). \tag{20}$$

En términos de las transformadas de Laplace,

$$F(s) = \nu\, U(s) \tag{21}$$

y, en términos de fasores,

$$\dot{F} = \nu\dot{U}\,. \tag{22}$$

[5] En el rozamiento estático, la fuerza ejercida sobre un cuerpo sólido libre en contacto con otro cuerpo sólido fijo aumenta sin que se produzca movimiento relativo entre ambos cuerpos hasta que se supera cierto valor. A partir de allí comienza el deslizamiento y la fuerza de rozamiento disminuye bruscamente, para variar luego en forma no lineal con la velocidad relativa (en su versión más simple, una vez en movimiento, la fuerza de rozamiento vuelve a ser constante). Este mecanismo es en general de difícil descripción debido a que no hay un modelo simple y único. A pesar de ello, tiene importancia en acústica, ya que en el caso en que el cuerpo "fijo" está en realidad sujeto mediante un resorte (o es él mismo elástico), se produce un mecanismo de oscilación por relajación. Por ejemplo, el arco de un violín deslizándose sobre la cuerda o el chirrido que a veces producen dos objetos con fuerte rozamiento entre sí, como el mecanismo de freno de un automóvil cuando se encuentra desgastado.

La fuerza y la velocidad, al ser proporcionales, se encuentran en fase. La figura 3 muestra la equivalencia circuital.



Figura 3. Equivalencia circuital correspondiente a la fricción viscosa.

2.1.4. Impedancia mecánica

Los componentes mecánicos de tipo masa, resorte y fricción pueden caracterizarse por medio de la impedancia mecánica, definida como el cociente entre las transformadas de Laplace de la fuerza y la velocidad,

$$Z_m(s) = \frac{F(s)}{U(s)} \tag{23}$$

o, para el caso de señales armónicas, con las que se puede trabajar fasorialmente, como el cociente entre los fasores fuerza y velocidad,

$$Z_m = \frac{\dot{F}}{\dot{U}}. \tag{24}$$

Así, para el caso de una masa, de (8) se obtiene la impedancia mecánica

$$Z_m(s) = ms. \tag{25}$$

Para el caso de un resorte,

$$Z_m(s) = \frac{k}{s}. \tag{26}$$

Por último, para una fricción,

$$Z_m(s) = \nu. \tag{27}$$

El concepto de impedancia puede generalizarse para cualquier combinación de estos componentes, como veremos en algunos ejemplos más adelante. Esta situación es semejante a la que tiene lugar para los circuitos eléctricos.

En el caso particular de un sistema con impedancia mecánica $Z_m(s)$ cuya velocidad sea senoidal, es decir

$$u(t) = U_o \operatorname{sen} \omega t, \tag{28}$$

la fuerza en régimen permanente estará dada por

$$f(t) = U_o\,|Z_m(j\omega)|\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi) \tag{29}$$

donde $\varphi = \arg(Z_m(j\omega))$. El ángulo φ es, también, la diferencia de fase entre la fuerza y la velocidad.

2.1.5. Generadores

Así como en los sistemas eléctricos los generadores o fuentes de tensión y corriente cumplen un rol fundamental como proveedores de energía y de señal, en el caso de los sistemas mecánicos esta función la cumplen los generadores de fuerza y de velocidad. Un generador ideal de fuerza será un dispositivo que aplica una fuerza independientemente de la velocidad del elemento al que lo aplica. Un generador ideal de velocidad, en cambio, imprime una velocidad en forma independiente de la fuerza necesaria para ello.

Un ejemplo de generador de fuerza es una bobina inmersa en un campo magnético por la que circula una corriente. Otro, una presión que actúa sobre una superficie móvil. Ambas situaciones son habituales en los procesos de transducción electroacústica. Con respecto al generador de velocidad, un ejemplo es un motor cuyo torque máximo es mucho mayor que el esfuerzo que opone la carga. En la figura 4 se muestra la simbología para los generadores mecánicos ideales, igual a la correspondiente a los generadores eléctricos.



Figura 4. Simbología para los generadores ideales de fuerza y velocidad.

2.1.6. Potencia mecánica

Cuando una fuerza f actúa sobre un cuerpo que se mueve con una velocidad u, está entregando una potencia

$$w = f\,u. \tag{30}$$

En efecto, en un intervalo de tiempo Δt el cuerpo recorre una distancia $u\Delta t$, por lo cual el trabajo mecánico realizado por la fuerza es $f\,u\Delta t$. Este trabajo corresponde a la energía que entrega la fuerza. Dividiendo por el tiempo Δt durante el que fue entregada, se obtiene la potencia.

Si la velocidad y la fuerza en régimen permanente son senoidales con un ángulo de fase φ,

$$u(t) = U_o\,\text{sen}\,\omega t, \tag{31}$$

$$f(t) = F_o\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi), \tag{32}$$

la potencia instantánea estará dada por

$$w(t) \;=\; U_o F_o \text{ sen } \omega t \text{ sen } (\omega t + \varphi).$$

Aplicando la relación trigonométrica 2 sen x sen y = cos($x - y$) − cos($x + y$), resulta

$$w(t) \;=\; \frac{U_o F_o}{2}\left(\cos\varphi \;-\; \cos\left(2\omega t + \varphi\right)\right). \tag{33}$$

La potencia media vale

$$W \;=\; \frac{U_o F_o}{2}\cos\varphi\,, \tag{34}$$

o bien, en términos de los valores eficaces,

$$W \;=\; U_{ef} F_{ef} \cos\varphi. \tag{35}$$

Aplicando estas ecuaciones a las impedancias elementales estudiadas resulta que en el caso de la fricción, donde $\varphi = 0$, la potencia media es simplemente el producto de la fuerza y la velocidad eficaces mientras que en el caso de la masa y el resorte, donde $\varphi = \pm\,\pi/2$, la potencia media es nula.

Una forma alternativa es plantear señales complejas como

$$u(t) \;=\; U_{ef}\, e^{j\omega t}. \tag{36}$$

$$f(t) \;=\; F_{ef}\, e^{j\,(\omega t + \varphi)}. \tag{37}$$

Si definimos una *potencia compleja* o *potencia vectorial* como

$$w(t) \;=\; f(t)\, u^{*}(t). \tag{38}$$

donde $u^{*}(t)$ es el conjugado complejo de $u(t)$. Reemplazando (36) y (37) en (38),

$$w(t) \;=\; U_{ef} F_{ef}\, e^{j\varphi}. \tag{39}$$

La parte real coincide con la potencia media y se llama, alternativamente, *potencia activa*:

$$W_a \;=\; \mathbf{Re}\left(f(t)\, u^{*}(t)\right) \;=\; U_{ef} F_{ef} \cos\varphi. \tag{40}$$

La parte imaginaria es la *potencia reactiva*:

$$W_r \;=\; \mathbf{Im}\left(f(t)\, u^{*}(t)\right) \;=\; U_{ef} F_{ef} \text{ sen } \varphi. \tag{41}$$

2.1.7. Palancas

Mientras los componentes anteriores estaban caracterizados por una velocidad y una fuerza, la palanca requiere para su descripción completa dos fuerzas y dos velocidades. En consecuencia el modelo eléctrico corresponderá a una estructura bipuerta o cuadripolar.

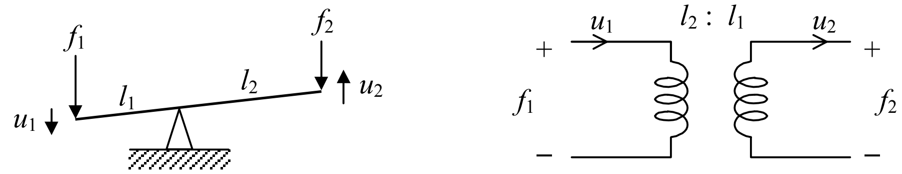


Figura 5. Equivalencia circuital correspondiente a la palanca.

Si los brazos de la palanca tienen longitudes l_1 y l_2, entonces las fuerzas f_1 y f_2 aplicadas (ver figura 5) estarán relacionadas por

$$f_2 = \frac{l_1}{l_2} f_1, \tag{42}$$

en tanto que las velocidades responderán a

$$u_2 = \frac{l_2}{l_1} u_1. \tag{43}$$

Estas relaciones son análogas a las correspondientes a un transformador eléctrico ideal:

$$v_2 = \frac{n_2}{n_1} v_1, \tag{44}$$

$$i_2 = \frac{n_1}{n_2} i_1, \tag{45}$$

donde n_1 y n_2 son la cantidad de vueltas de los arrollamientos primario y secundario. En la figura 4 se muestra esta analogía.

2.1.8. Transformación de impedancia mecánica

Cuando entre una fuente de fuerza o velocidad y una impedancia mecánica se interpone una palanca, como se muestra en la figura 6, es posible calcular la impedancia vista desde la fuente aplicando las ecuaciones (42) y (43) del transformador y la (23)

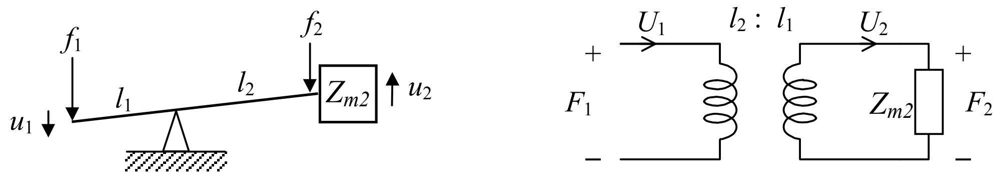


Figura 6. Transformación de impedancia mecánica por medio de una palanca.

de la impedancia. Resulta

$$F_1 = \frac{l_2}{l_1} F_2 = \frac{l_2}{l_1} Z_{m2} U_2 = \frac{l_2}{l_1} Z_{m2} \frac{l_2}{l_1} U_1 = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 Z_{m2} U_1, \quad (46)$$

de donde

$$Z_{m1} = \frac{F_1}{U_1} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 Z_{m2}. \quad (47)$$

Si el brazo de palanca secundario es mayor que el primario ($l_2 > l_1$), entonces la impedancia vista desde el primario es mayor que la impedancia conectada en el secundario, lo que significa que para lograr mover el brazo primario a igual velocidad habrá que aplicar una fuerza mayor.

2.1.9. Conservación de potencia en un transformador mecánico

Una característica muy importante de un transformador mecánico ideal es la conservación de potencia. La potencia entregada al primario es:

$$w_1 = f_1 \, u_1, \quad (48)$$

en tanto que la potencia que el secundario suministra a la carga conectada a él será

$$w_2 = f_2 \, u_2. \quad (49)$$

Utilizando nuevamente las ecuaciones (23) y (24) del transformador, tendremos

$$w_2 = f_2 \, u_2 = \frac{l_1}{l_2} f_1 \frac{l_2}{l_1} u_1 = f_1 \, u_1 = w_1, \quad (50)$$

lo que demuestra la conservación de potencia.

2.1.10. Conexiones en “serie” y en “paralelo”

El conexionado en serie y en paralelo de los circuitos eléctricos puede extrapolarse a los circuitos mecánicos. Sólo hace falta precisar bajo qué condiciones una interacción entre dos o más componentes de un sistema mecánico se encuentra en paralelo y bajo cuáles en serie. En el caso eléctrico, se tiene un *paralelo* cuando dos componentes están sometidos a la *misma tensión* y una *serie* cuando están recorridos por la *misma corriente*.

En la analogía tipo impedancia que venimos utilizando, el paralelo se dará cuando dos componentes mecánicos están sometidos a la misma fuerza. Para ello la interacción debe efectuarse a través de elementos en los que no se pierda fuerza por inercia ni por fricción, excepto que sean componentes libres. Así, típicamente un resorte ideal (sin masa ni fricción) transmitirá la fuerza aplicada sobre él a una masa (u otra impedancia), en cuyo caso aparecerá en paralelo con ella. En cambio una masa sólo podrá estar en paralelo con otro componente si recibe una fuerza pero no la transmite (parcialmente) a otro componente.

Asimismo, la serie corresponderá al caso en que los componentes se desplazan a igual velocidad, para lo cual la interacción debe efectuarse a través de elementos rígidos. Una masa rígida confiere su velocidad a otra impedancia vinculada a ella.

2.1.11. Ejemplos

Veamos primeramente algunas combinaciones de dos componentes. En la figura 7 se muestra una masa *m* apoyada sobre una superficie lubricada con fricción viscosa ν sobre la que actúa una fuerza *f*. Dado que las velocidades de la masa y de la viscosidad

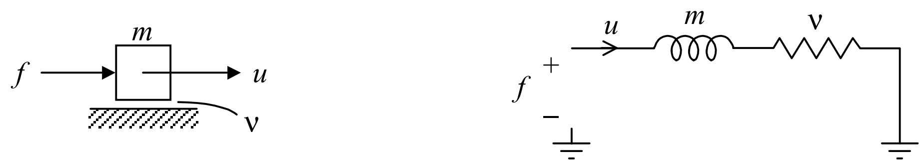


Figura 7. Una masa sobre una superficie lubricada y su modelo circuital equivalente.

son iguales, el circuito correspondiente es en serie. La fuerza que la masa ejerce sobre la superficie es menor que la aplicada porque parte de ella se utiliza para acelerarla. Esta fuerza, de valor ν*u*, es aplicada a su vez por la fricción, en sentido opuesto, a la masa:

$$f - \nu u = m\,u'$$

$$f = \nu u + m\,u'. \tag{51}$$

Transformando,

$$F(s) = (\nu + ms)\,U(s). \tag{52}$$

Para señales senoidales puede aplicarse el concepto de fasor y, entonces,

$$\dot{F} = (\nu + j\omega m)\,\dot{U} \tag{53}$$

Como segundo ejemplo, consideremos la misma disposición, pero en la que se aplica una fuerza a la fricción. Esta situación se daría en el caso de aplicar la fuerza a la superficie de masa despreciable en lugar de aplicarla a la masa (figura 8). En este caso



Figura 8. Una masa sobre una superficie lubricada, impulsada desde esta última, y su modelo circuital equivalente.

la fuerza aplicada a la superficie se transmite directamente a la masa, por lo que ambas están sometidas a la misma fuerza. En consecuencia, en el modelo circuital estarán conectadas en paralelo.

Obsérvese que si bien la superficie estará animada por una velocidad u, la velocidad que experimenta el lubricante es, en realidad, la diferencia entre las velocidades de la superficie y la masa. Las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned} f &= \nu(u - u_1) \\ f &= m u_1' \end{aligned} \qquad (54)$$

Transformando y eliminando $U_1(s)$, resulta

$$F(s) = \frac{\nu\, ms}{\nu + ms} U(s) , \qquad (55)$$

que es la ecuación de una conexión paralelo entre ν y ms, corroborando lo expresado anteriormente.

Consideremos ahora una masa m conectada a un apoyo fijo por medio de un resorte de constante k, sobre la que actúa una fuerza f, como se muestra en la figura 9.



Figura 9. Una masa sujeta a un apoyo fijo por medio de un resorte.

Dado que la masa y el extremo móvil del resorte se mueven a la misma velocidad, el circuito equivalente es una serie. La ecuación de movimiento es

$$f(t) - k \int u(t)\, dt = m\, u'(t) , \qquad (56)$$

o bien, transformando y reacomodando,

$$F(s) = \left(\frac{k}{s} + ms \right) U(s) . \qquad (57)$$

Si en lugar de aplicar la fuerza a la masa se le aplica al resorte (por ejemplo, si el apoyo en realidad estuviera vibrando), como se muestra en la figura 10, entonces el extremo excitado del resorte se moverá a diferente velocidad que el extremo sujeto a la masa pero, en cambio, la fuerza aplicada al resorte se transmitirá totalmente a la masa.[6] Por

[6] En efecto, si el resorte no transmitiera totalmente la fuerza, estaría sometido a una fuerza neta que, al ser de masa nula, le imprimiría una aceleración infinita.

consiguiente, la magnitud común a ambos elementos será la fuerza, por lo que el circuito análogo corresponderá a un paralelo. Las ecuaciones dinámicas son

$$\begin{aligned} f(t) &= k\int \left(u(t) - u_1(t)\right) dt \\ f(t) &= m\, u_1'(t) \end{aligned} \tag{58}$$

Transformando y eliminando $U_1(s)$, resulta

$$F(s) = \frac{k\,m}{\frac{k}{s} + ms} U(s) = \frac{k\,s}{\frac{k}{m} + s^2} U(s), \tag{59}$$

que corresponde al paralelo de la masa y la compliancia.

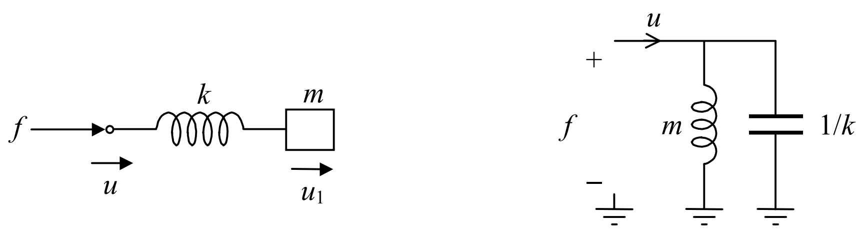


Figura 10. Una masa sujeta a un resorte, accionada desde el resorte.

Consideremos ahora el ejemplo de la figura 11, similar al del ejemplo anterior con el agregado de una fricción ν entre la masa y una superficie fija. En este caso la masa y la fricción están animadas por la misma velocidad u_1, por lo que sus equivalentes circuitales estarán en serie. Esta serie, vista como una impedancia, estará sometida a la misma fuerza que el resorte, por lo que estará en paralelo con aquél. Las ecuaciones dinámicas se escriben en forma similar a los casos anteriores, y nuevamente se puede corroborar la concordancia con las ecuaciones correspondientes al modelo eléctrico.

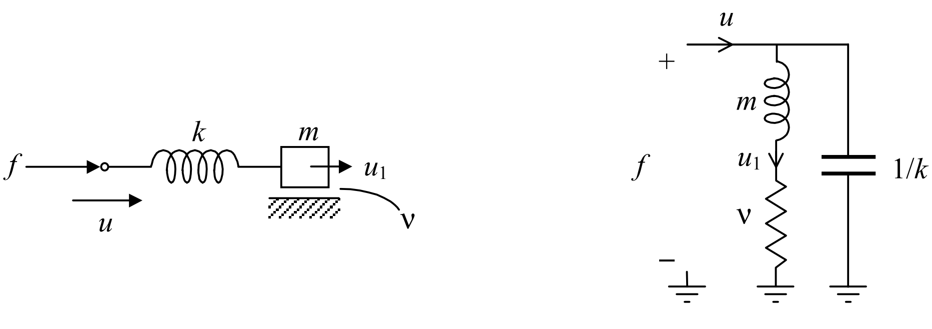


Figura 11. Una masa sujeta a un apoyo fijo por medio de un resorte, accionada desde el resorte.

Si en lugar de impulsar el extremo libre del resorte se sujeta éste a un apoyo fijo y se impulsa la masa (figura 12), entonces todos los componentes se moverán a la misma velocidad y el circuito equivalente será una serie.

El ejemplo siguiente, ilustrado en la figura 13, incorpora una segunda masa al caso de la figura 11. En este ejemplo la masa agregada (m_1) se mueve a la misma veloci-

dad que el extremo del resorte, por lo que su equivalente circuital estará en serie con el conjunto del ejemplo original. Vemos que sólo parte de la fuerza total aplicada se utiliza para acelerar a la masa m_1, ya que el resto es utilizado para deformar el resorte.

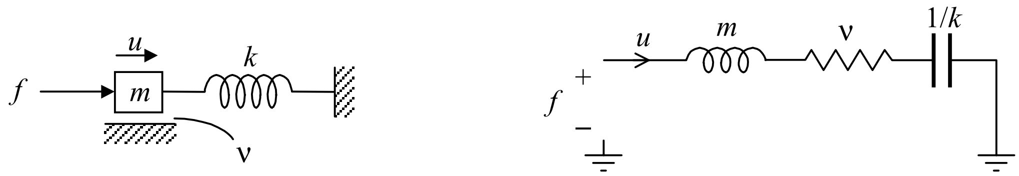


Figura 12. Una masa con fricción sujeta a un apoyo fijo por medio de un resorte.

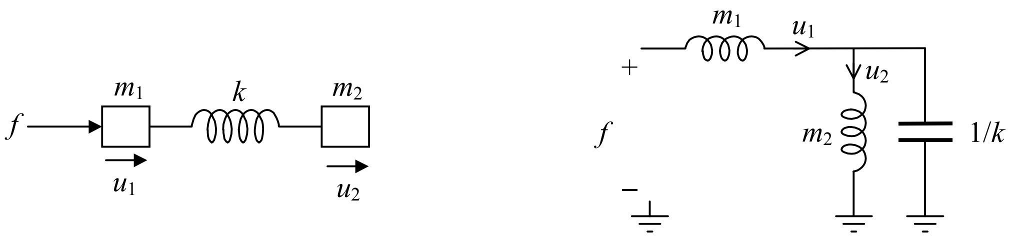


Figura 13. Dos masas sujetas a un resorte, accionada desde una de ellas, y su modelo circuital equivalente.

Consideremos ahora una combinación de elementos de mayor complejidad, como la indicada en la figura 14. Aquí la velocidad de la masa m_3 es compartida por cada uno de los grupos de masa y resorte k_1 - m_1 y k_2 - m_2, por lo que estarán en serie. Cada uno de esos dos grupos, no obstante, estará en paralelo dado que la fuerza que comprime al resorte respectivo es la misma que se aplica a la correspondiente masa.

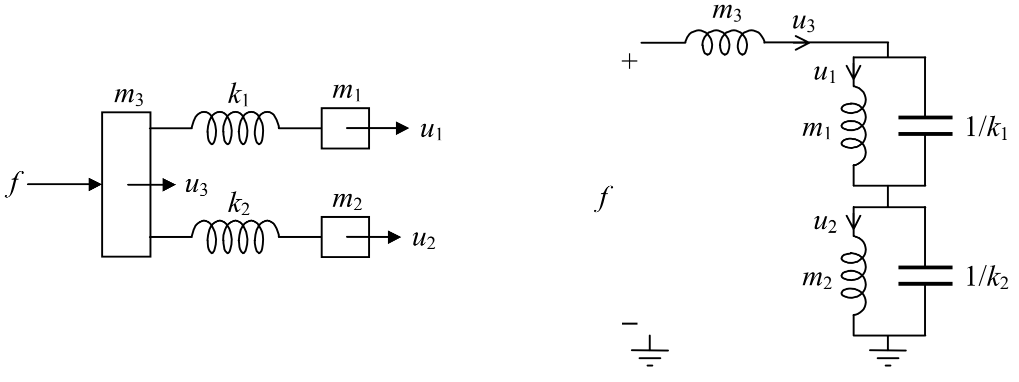


Figura 14. Tres masas vinculadas y accionadas desde una de ellas, y el modelo circuital equivalente.

Por último, consideremos un caso similar al de la figura 14, con un acoplamiento a fricción, ν, entre las masas m_1 y m_2, como se muestra en la figura 15. La fricción hace que la fuerza total aplicada sobre las masas m_1 y m_2 no coincida con la de los respectivos resortes, por lo cual los resortes y las masas no estarán ya en paralelo. Evidente-

mente, la velocidad que experimenta la capa lubricante entre ambas masas es la diferencia de velocidades de las masas, por lo que en el modelo circuital la resistencia correspondiente estará en derivación. La velocidad de la capa lubricante también será igual a la diferencia de velocidades de los resortes, por lo que dicha resistencia se comunicará con el nudo de unión entre los equivalentes circuitales de los resortes. El resultado también se muestra en la figura 15.

A modo de verificación es útil considerar la situación límite en la que la fricción tiende a 0, ya que en ese caso deberíamos obtener el circuito de la figura 14. Podemos ver que, en efecto, sucede así.

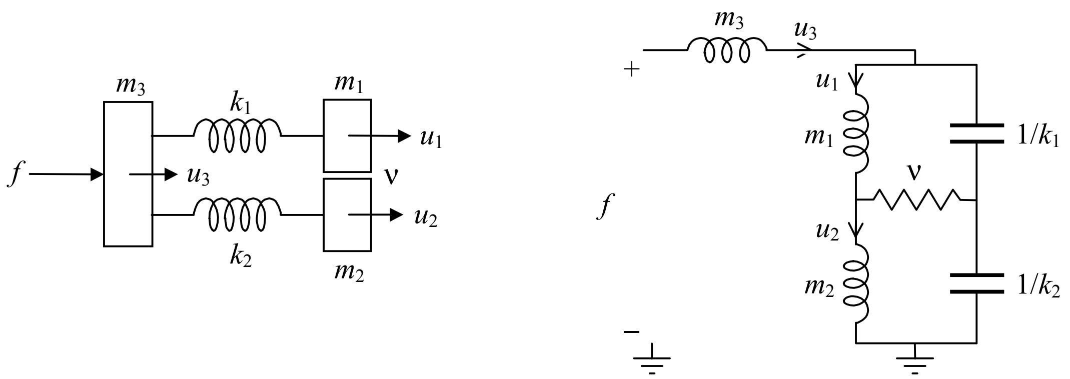


Figura 15. Tres masas vinculadas y accionadas desde una de ellas con el agregado de un vínculo resistivo entre dos de ellas.

2.2. Circuitos acústicos

Un sistema acústico está formado, en general, por una interconexión de conductos y cavidades de diversos tamaños y formas y por elementos porosos o celulares.[7] La idea de reemplazar estos elementos simples por componentes equivalentes utilizables en un circuito se enfrenta con la dificultad de que a causa del comportamiento ondulatorio del sonido el campo acústico no es uniforme. Ello implica que un componente no puede estar caracterizado por dos únicas variables como lo son la tensión y la corriente en el caso eléctrico o la fuerza y la velocidad en el caso mecánico. Cuando las dimensiones físicas de estos componentes son mucho menores que la longitud de onda, sin embargo, es posible hacer una aproximación similar a la que se efectúa habitualmente en los circuitos eléctricos que permite realizar un tratamiento con *parámetros concentrados*.[8]

En el caso acústico convendrá seleccionar como una de las variables fundamentales la *presión*, p. Para satisfacer el criterio de que el producto de las dos variables elegidas sea una potencia, la otra variable debe ser un *caudal*,[9] simbolizado q.

Igual que en el caso mecánico, es posible adoptar dos analogías: la *analogía tipo movilidad acústica* y la *analogía tipo impedancia acústica*. Consideraremos únicamente esta última, según la cual

---

[7] Si admitimos la propagación de ondas acústicas a través de materiales sólidos, podemos incorporar también las láminas o placas aislantes, aunque otra posibilidad es considerar éstas como componentes mecánicos con una interfaz con el medio acústico gaseoso.

[8] De hecho, los mismas reparos caben para el caso eléctrico (y para el mecánico si consideramos la elasticidad). Es sólo debido a que las longitudes de onda habituales son muy grandes que en general ni siquiera se toma conciencia del problema, salvo a frecuencias superiores al GHz.

[9] En muchos libros se llama al caudal *velocidad de volumen*. No parece haber razón para resignar la palabra "caudal", bien establecida en castellano y de significado inequívoco en la fluodinámica.

$$V \leftrightarrow P$$
$$I \leftrightarrow Q \qquad (60)$$

En el caso acústico existe acuerdo unánime en utilizar esta analogía, ya que el caudal es un flujo de materia al igual que la corriente lo es de carga, en tanto que la presión puede fácilmente asimilarse a la tensión, ya que es posible hablar de caídas de presión.

Consideraremos, en las secciones que siguen, cada uno de los elementos básicos de un sistema acústico concentrado, estudiando las relaciones entre el caudal y la presión en cada uno de ellos y las correspondientes analogías circuitales.

2.2.1. Masa acústica o inertancia

Una *masa acústica*, o *inertancia*, es una pequeña masa de aire capaz de desplazarse sin compresión apreciable. El caso más típico lo constituye el aire dentro de un pequeño tubo cuyas dimensiones transversales y longitudinales son mucho menores que la longitud de onda (figura 16). Si la longitud l del tubo es menor que $\lambda/36$, la presión sonora dentro del tubo es constante con un error menor del 1%. Para una frecuencia de 1 kHz esto corresponde a un tubo de 1 cm de largo. Admitiendo un error del 5%, la longitud admisible se duplica.

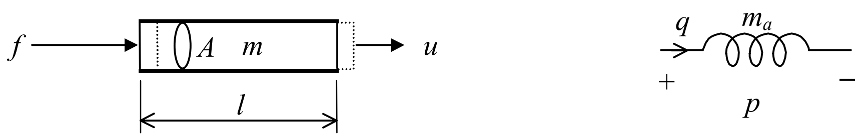


Figura 16. A la izquierda, una masa acústica. En línea de puntos se ha remarcado que la masa de aire se desplaza en bloque. A la derecha, su equivalente circuital

Dado que la masa, que denotaremos con m, se desplaza en bloque (es decir, con la misma velocidad en todos sus puntos), podemos aplicarle globalmente la segunda ley de Newton:

$$f(t) = m\,a(t). \qquad (61)$$

En nuestro caso la fuerza es la presión existente en el extremo del tubo[10] multiplicada por el área A de la sección transversal del tubo, y la aceleración es la derivada de la velocidad u:

$$p(t)\,A = m\,u'(t). \qquad (62)$$

Dado que buscamos una relación entre la presión y el caudal, podemos hacer aparecer este último multiplicando la velocidad por la sección del tubo:

$$p(t)\,A^2 = m\,u'(t)\,A = m\,q'(t) \qquad (63)$$

[10] Si la presión en el extremo libre no es 0, entonces la presión se sustituye por la diferencia de presiones.

Por último,

$$p(t) = \frac{m}{A^2}\, q'(t)\,. \tag{64}$$

El valor

$$M_a = \frac{m}{A^2} \tag{65}$$

es la *masa acústica* o *inertancia*. Reemplazando en (64) resulta

$$p(t) = M_a\, q'(t) \tag{66}$$

y, aplicando la transformada de Laplace,

$$P(s) = M_a s\, Q(s). \tag{67}$$

Esta expresión es análoga a

$$V(s) = Ls\, I(s), \tag{68}$$

correspondiente a los circuitos eléctricos, por lo que la inertancia se comporta en forma análoga a la inductancia.

En la expresión de la inertancia de la ecuación (65) aparece la masa m del gas contenido en el tubo. En primera aproximación dicha masa puede calcularse como

$$m \cong \rho_o A\, l. \tag{69}$$

Un cálculo más preciso debe tener en cuenta una corrección por extremo por la cual la longitud efectiva es algo mayor que la longitud real (Beranek, 1961; Kinsler, 1995). Esta corrección depende de si el extremo del tubo está libre o aflora al ras de una superficie plana grande con respecto a la longitud de onda (denominada habitualmente *pestaña*). En el primer caso (terminación *sin* pestaña) la longitud efectiva es:

$$l' \cong l + n\, 0{,}613\, a,$$

donde a es el radio del tubo y n es la cantidad de extremos libres (1 ó 2). Con esta expresión, la inertancia adopta la forma

$$M_a = \frac{\rho_o \left(l + n\, 0{,}613\, a\right)}{\pi\, a^2}\,. \tag{70}$$

En el segundo caso (terminación *con* pestaña) la longitud efectiva correspondiente es

$$l' = l + n\frac{8}{3\pi}a = l + n\, 0{,}849\, a\,,$$

conduciendo a una inertancia dada por[11]

$$M_a = \frac{\rho_o \left(l + n\, 0{,}849\, a\right)}{\pi\, a^2}\,. \tag{71}$$

[11] En caso de que el tubo tenga una terminación libre y la otra con pestaña se utilizaría una corrección combinada igual a $(0{,}613 + 0{,}849)a$.

La relación entre la presión y el caudal de la ecuación (67) puede expresarse en el formalismo fasorial para el caso de señales senoidales. Si la frecuencia angular es ω, tendremos

$$\dot{P} \;=\; j\omega M_a\, \dot{Q} \tag{72}$$

2.2.2. Compliancia acústica

Una *compliancia acústica* es una pequeña masa de aire capaz de comprimirse o expandirse sin desplazamiento apreciable. Un caso típico es el aire dentro de un pequeño tubo cerrado en un extremo. Otro, el aire en una cavidad con un pequeño orificio (figura 17). En cualquier caso las dimensiones de la cavidad deben ser mucho menores que la longitud de onda a los efectos de garantizar que la presión aumenta uniformemente en todo el volumen de gas. Igual que en el caso de la masa acústica, bastará que la dimensión máxima de la cavidad sea menor que λ/36 para un error del 1%.



Figura 17. A la izquierda, una compliancia acústica. El caudal que ingresa se utiliza exclusivamente para comprimir el aire encerrado, no para ocasionar un movimiento neto. A la derecha, equivalencia circuital correspondiente a una compliancia acústica.

El comportamiento dinámico de la compliancia responde a la ley de compresión adiabática,

$$\frac{\Delta P}{P} \;=\; -\gamma\frac{\Delta V}{V} \tag{73}$$

En nuestro caso, ΔP es la presión sonora p, P es la presión de equilibrio, es decir, la presión atmosférica P_o, V es el volumen de la cavidad y ΔV es el opuesto del volumen ingresado debido al caudal q. En efecto, dado que el volumen total de la cavidad se mantiene constantemente igual a V (dado que las paredes de la cavidad son rígidas), el volumen inicial *de gas* se ha reducido debido al ingreso de caudal externo. El volumen ingresado es, simplemente, la integral del caudal. Sustituyendo estos valores en (73) se obtiene

$$\frac{p(t)}{P_o} \;=\; \frac{\gamma}{V}\int q(t)\,dt\,. \tag{74}$$

Multiplicando por P_o, y teniendo en cuenta que $\gamma P_o = \rho_o c^2$, donde ρ_o es la densidad del gas y c, la velocidad del sonido, resulta

$$p(t) \;=\; \frac{\rho_o c^2}{V}\int q(t)\,dt\,. \tag{75}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación de un capacitor eléctrico:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt\,. \tag{76}$$

El valor

$$C_a = \frac{V}{\rho_o c^2}\,, \tag{77}$$

es la *compliancia acústica* de la cavidad. Sustituyendo en (75), resulta

$$p(t) = \frac{1}{C_a}\int q(t)\,dt\,. \tag{78}$$

Aplicando la transformación de Laplace,

$$P(s) = \frac{1}{C_a s}Q(s)\,. \tag{79}$$

que corresponde a

$$V(s) = \frac{1}{Cs}I(s)\,. \tag{80}$$

En términos de fasores, para el caso de señales senoidales, podemos reescribir la ecuación 79 como

$$\dot{P} = \frac{1}{j\omega C_a}\dot{Q}\,. \tag{81}$$

2.2.3. Resistencia acústica

La *resistencia acústica* es el resultado de la presencia de una fricción viscosa interpuesta en el recorrido de la onda sonora. Ejemplos típicos son una constricción o angostamiento de un conducto, o una malla de trama fina o material poroso como la lana de vidrio, la lana mineral, las espumas poliuretánicas o el metal sinterizado (figura 18).

La resistencia acústica responde a la siguiente ecuación

$$p(t) = p_1(t) - p_2(t) = R_a\, q(t) \tag{82}$$

o, en versión transformada,

$$P(s) = R_a\, Q(s). \tag{83}$$

En el caso de un tubo de diámetro muy pequeño (capilar) con respecto a la longitud de onda, puede obtenerse la resistencia acústica por medio de la ley de Poiseuille, que proporciona el caudal obtenido cuando un fluido con coeficiente de viscosidad η circula

por un conducto entre cuyos extremos hay una diferencia de presión.[12] El valor de la resistencia acústica obtenida es (Sears, 1975)

$$R_a = \frac{8\eta l}{\pi a^4}. \quad (84)$$

El valor del coeficiente de viscosidad para el aire a 20 ºC y 1013,25 hPa es de $1{,}86 \cdot 10^{-5}$ N·s/m^2.

NOTA: En realidad la resistencia acústica de un tubo está acompañada por la masa acústica del aire encerrado en él, por lo cual en la práctica será preciso constatar si ésta puede despreciarse o no.

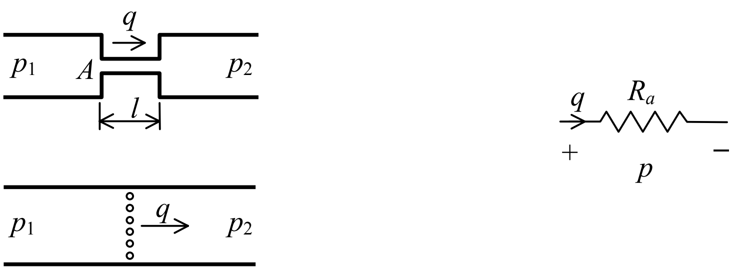


Figura 18. A la izquierda, dos ejemplos de resistencias acústicas. A la derecha, equivalencia circuital.

Si el tubo no es muy estrecho, la fricción tiene importancia solamente en la denominada *capa límite*, es decir, una delgada película alrededor de la superficie interior del tubo. Fuera de la capa límite la onda es casi plana y por lo tanto no hay movimiento relativo entre capas deslizantes. El espesor δ de la capa límite, que depende de la frecuencia, puede calcularse mediante la expresión (Ingard, 1953)

$$\delta = \sqrt{\frac{\eta}{\rho_o \omega}} . \quad (85)$$

Por ejemplo, para 100 Hz la capa límite tiene un espesor de 0,16 mm. Para 1 kHz dicho espesor se reduce a 0,05 mm.

Si el radio *a* del tubo es mucho mayor que δ, entonces la resistencia acústica se calcula como (Ingard, 1953)

$$R_a = \frac{\sqrt{2\eta\rho_o\omega}}{2\pi a^3}(l + na), \quad (86)$$

donde *n* es la cantidad de extremos libres (*n* = 1 ó 2).

[12] El coeficiente de viscosidad η se define a partir de la ecuación

$$F = \eta A \, dv/dy,$$

donde *F* es la fuerza cortante entre dos capas paralelas de fluido de área A en contacto (es decir, la fuerza que tiende a deslizar una capa frente a la otra) y d*v*/d*y* es el gradiente de velocidad en dirección perpendicular a las capas deslizantes.

2.2.4. Impedancia acústica

Los componentes acústicos quedan caracterizados por su *impedancia acústica*, definida como el cociente entre las transformadas de Laplace de la presión y el caudal.

$$Z_a(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}. \tag{87}$$

En el caso en que las señales sean senoidales se puede trabajar fasorialmente, y entonces puede considerarse la impedancia acústica compleja, definida como el cociente entre los fasores de presión y de caudal:

$$Z_a = \frac{\dot{P}}{\dot{Q}}. \tag{88}$$

Para los casos de una masa acústica, una compliancia acústica y una resistencia acústica se tiene, respectivamente,

$$Z_a(s) = M_a s, \tag{89}$$

$$Z_a(s) = \frac{1}{C_a s}, \tag{90}$$

$$Z_a(s) = R_a. \tag{91}$$

Igual que en los casos eléctrico y mecánico, el concepto de impedancia puede generalizarse para cualquier combinación de estos componentes, como veremos luego.

En muchos casos es de interés la *impedancia acústica específica*, Z_{ae}, definida como el cociente entre la presión P y la *velocidad* U (en lugar del caudal). Ello sucede cuando interesan las propiedades locales del campo acústico. Para una onda plana atravesando un área A podemos establecer la siguiente relación entre la impedancia acústica y la impedancia acústica específica:

$$Z_{ae} = A\, Z_a. \tag{92}$$

Para las ondas planas propagándose en el aire o en un tubo de longitud infinita o con terminación anecoica[13] vale:

$$Z_{ae} = \rho_o c. \tag{93}$$

2.2.5. Generadores acústicos

En el caso de los sistemas acústicos, será necesario contar con generadores capaces de introducir señal. Las dos formas esenciales serán el generador de presión y el generador de caudal. Un generador ideal de presión será un dispositivo que aplica una presión independientemente del caudal absorbido por el elemento al que la aplica. Un

[13] Una terminación anecoica es aquélla en la que no existen reflexiones, lo cual puede lograrse con un coeficiente de absorción $\alpha = 1$ en el extremo del tubo.

generador ideal de caudal, en cambio, imprime un caudal en forma independiente de la presión que deba ejercer para ello. La simbología utilizada corresponde a la de los generadores de tensión y corriente de los circuitos eléctricos (figura 19)

Un ejemplo de generador de presión es una pequeña cavidad en la que de alguna manera se genera un campo acústico que no es alterado por la presencia de otras cavidades o componentes de gran impedancia acústica. Un caso típico es un calibrador acústico. Los generadores de caudal son más frecuentes y naturales, ya que se logran



Figura 19. Simbología para los generadores ideales de presión y caudal.

con cualquier superficie que vibre con velocidad esencialmente independiente de la carga que representa la masa de aire en contacto con ella (es decir, la denominada *impedancia de radiación*). Algunos ejemplos son la superficie de un altavoz, un pistófono y un cristal piezoeléctrico.

2.2.6. Potencia acústica

Cuando una presión p actúa sobre una porción de gas que se mueve con un caudal q, está entregando una potencia

$$w = p\,q. \tag{94}$$

En efecto, si la sección expuesta tiene área A, entonces la velocidad es q/A y, por consiguiente, en un intervalo de tiempo Δt el gas recorre una distancia $(q/A)\Delta t$. Por otra parte, la fuerza actuante es pA, por lo cual el trabajo mecánico realizado por la fuerza es $pA(q/A)\Delta t$. Este trabajo corresponde a la energía entregada. Dividiendo por el tiempo Δt durante el que fue entregada, se obtiene la potencia.

Si el caudal y la presión en régimen permanente son senoidales con un ángulo de fase φ,

$$q(t) = Q_o \operatorname{sen} \omega t, \tag{95}$$

$$p(t) = P_o \operatorname{sen} (\omega t + \varphi), \tag{96}$$

la potencia instantánea estará dada por

$$w(t) = Q_0 P_0 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \frac{Q_0 P_0}{2}\left(\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\right). \tag{97}$$

La potencia media vale

$$W = \frac{Q_0 P_0}{2} \cos\varphi, \tag{98}$$

o bien, en términos de los valores eficaces,

$$W \;=\; Q_{ef}\,P_{ef}\cos\varphi. \qquad (99)$$

Aplicando estas ecuaciones a las impedancias acústicas elementales resulta que en el caso de la resistencia acústica, donde $\varphi = 0$, la potencia media es simplemente el producto de la presión y el caudal eficaces mientras que en el caso de la masa y la compliancia acústicas, donde $\varphi = \pm\,\pi/2$, la potencia media es nula.

Igual que en los casos eléctrico y mecánico, una forma alternativa es plantear señales complejas como

$$q(t) \;=\; Q_{ef}\,\mathrm{e}^{j\omega t}. \qquad (100)$$

$$p(t) \;=\; P_{ef}\,\mathrm{e}^{j\,(\omega t + \varphi)}. \qquad (101)$$

Si definimos una *potencia compleja* o *potencia vectorial* como

$$w(t) \;=\; p(t)\,q^{*}(t). \qquad (102)$$

donde $q^{*}(t)$ es el conjugado complejo de $q(t)$, se elimina la dependencia del tiempo. En efecto, reemplazando (100) y (101) en (102), se tiene

$$w(t) \;=\; Q_{ef}P_{ef}\,\mathrm{e}^{j\varphi}. \qquad (103)$$

La parte real coincide con la potencia media y se llama, alternativamente, *potencia acústica activa*:

$$W_a \;=\; \mathbf{Re}\,(\,p(t)\,q^{*}(t)) \;=\; Q_{ef}\,P_{ef}\cos\varphi. \qquad (104)$$

La parte imaginaria es la *potencia acústica reactiva*:

$$W_r \;=\; \mathbf{Im}\,(\,p(t)\,q^{*}(t)) \;=\; Q_{ef}\,P_{ef}\,\mathrm{sen}\,\varphi. \qquad (105)$$

2.2.7. Transformador acústico

En los componentes anteriores el comportamiento se describía con un solo valor de presión y uno solo de caudal. El transformador acústico, en cambio, requiere dos pares presión-caudal, correspondientes a la *puerta de entrada* o *primario* y a la *puerta de salida* o *secundario*. Un ejemplo es la bocina exponencial, como se muestra en la figura 20. En ella el área de la sección transversal crece según la ley

$$A(x) \;=\; A_0 e^{x/l}, \qquad (106)$$

donde A_0 es el área en la *garganta* ($x = 0$) y l la distancia en la que el área crece *e* veces.

Supondremos que la *boca* de la bocina ($x = L$) está conectada a una impedancia acústica específica Z_{ae} y que las señales son senoidales complejas de frecuencia angular ω. Entonces, si llamamos

$$\theta \;=\; \mathrm{arctg}\sqrt{\left(\frac{4\pi l}{\lambda}\right)^2 - 1} \;=\; \mathrm{arctg}\sqrt{\left(\frac{2l\omega}{c}\right)^2 - 1}\,, \qquad (107)$$

puede demostrarse que, para $\lambda < 4\pi l$ la presión sonora y el caudal en una sección ubicada a una distancia x de la garganta están dadas por (Miyara, 2003a)

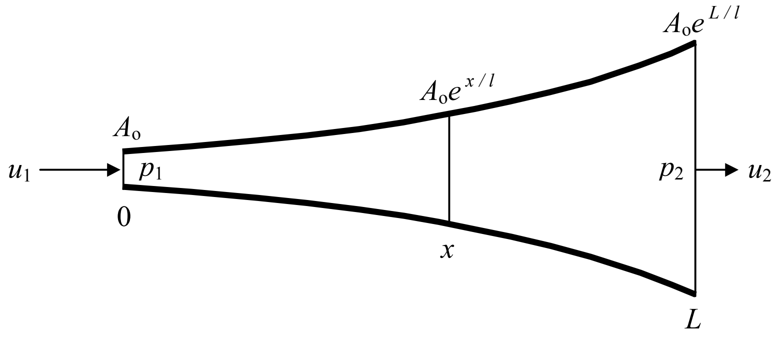


Figura 20. Una bocina exponencial como transformador acústico.

$$p(x,t) \;=\; P_o\, e^{j\omega t} e^{\frac{L-x}{2l}} \left[\frac{Z_{ae}}{\rho_o c} \operatorname{sen}\left(\theta \;-\; \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \;+\; j \operatorname{sen}\left(\frac{L-x}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \right], \qquad (108)$$

$$q(x,t) \;=\; \frac{P_o A_o}{\rho_o c}\, e^{j\omega t} e^{\frac{L+x}{2l}} \left[\operatorname{sen}\left(\theta \;+\; \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \;+\; j\, \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} \operatorname{sen}\left(\frac{L-x}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \right]. \qquad (109)$$

En la boca de la bocina ($x = L$) se tiene

$$p(L,t) \;=\; P_o\, e^{j\omega t}\, \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} \operatorname{sen}\theta, \qquad (110)$$

$$q(L,t) \;=\; P_o\, e^{j\omega t}\, \frac{1}{\rho_o c}\, A_o e^{L/l} \operatorname{sen}\theta; \qquad (111)$$

y en la garganta ($x = 0$),

$$p(0,t) \;=\; P_o\, e^{j\omega t} e^{\frac{L}{2l}} \left[\frac{Z_{ae}}{\rho_o c} \operatorname{sen}\left(\theta \;-\; \frac{L}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \;+\; j \operatorname{sen}\left(\frac{L}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \right], \qquad (112)$$

$$q(0,t) \;=\; \frac{P_o A_o}{\rho_o c}\, e^{j\omega t} e^{\frac{L}{2l}} \left[\operatorname{sen}\left(\theta \;+\; \frac{L}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \;+\; j\, \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} \operatorname{sen}\left(\frac{L}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \right]. \qquad (113)$$

Para encontrar las relaciones de transformación, podemos expresar $p(0, t)$ en términos de $p(L, t)$ y $q(0, t)$ en términos de $q(L, t)$:

$$p(0,t) \;=\; p(L,t)\, \frac{e^{\frac{L}{2l}}}{\operatorname{sen}\theta} \left[\operatorname{sen}\left(\theta \;-\; \frac{L}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \;+\; j\, \frac{\rho_o c}{Z_{ae}} \operatorname{sen}\left(\frac{L}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \right], \qquad (114)$$

$$q(0,t) \;=\; q(L,t)\, \frac{e^{-\frac{L}{2l}}}{\operatorname{sen}\theta} \left[\operatorname{sen}\left(\theta \;+\; \frac{L}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \;+\; j\, \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} \operatorname{sen}\left(\frac{L}{2l} \operatorname{tg}\theta \right) \right]. \qquad (115)$$

Consideremos el caso en que la boca se conecta a una impedancia acústica específica igual a la del aire, vale decir,

$$Z_{ae2} \;=\; \rho_o c. \tag{116}$$

Este caso es de interés porque, según veremos, en el rango de frecuencias en que se suelen utilizar provechosamente las bocinas la radiación equivale a una impedancia acústica específica igual a la del aire.

Para frecuencias suficientemente altas como para que $4\pi l >> \lambda$ (es decir, $\omega >> 2l/c$), de (107) resulta $\theta \cong \pi/2$, por lo que las ecuaciones anteriores se reducen a

$$p(0,t) \;=\; p(L,t)\, e^{\frac{L}{2l}}\, e^{j\frac{L}{2l}\operatorname{tg}\theta}, \tag{117}$$

$$q(0,t) \;=\; q(L,t)\, e^{-\frac{L}{2l}}\, e^{j\frac{L}{2l}\operatorname{tg}\theta}. \tag{118}$$

La exponencial $e^{j(L/2l)\,\operatorname{tg}\theta}$ tiene módulo unitario y representa el defasaje entre las variables en la garganta y las correspondientes a la boca de la bocina. De hecho, se cumple

$$e^{j\frac{L}{2l}\operatorname{tg}\theta} \;\cong\; e^{j\frac{L}{c}\omega}. \tag{119}$$

Dicho defasaje es lineal con la frecuencia, produciendo, por consiguiente, un retardo independiente de la frecuencia (en el rango de interés) e igual al tiempo que demora el sonido en recorrer la bocina desde la garganta hasta la boca. Dicho retardo puede ignorarse en la mayoría de los casos, con lo cual la bocina se puede considerar como un transformador acústico. En la figura 21 se muestra el modelo circuital de la bocina.

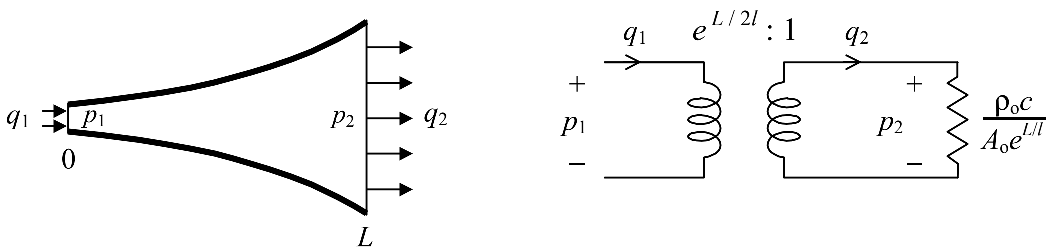


Figura 21. Modelo circuital como transformador acústico de la bocina exponencial cargada con una impedancia específica igual a la del aire.

De las ecuaciones (117) y (118) se desprende que la presión en la garganta es mayor que la presión en la boca y, en cambio, el caudal en la garganta es menor que en la boca. Esto puede explicarse teniendo en cuenta que la impedancia acústica en la garganta es mucho mayor que en la boca. Estas impedancias pueden obtenerse dividiendo la ecuación (117) por la (118). Resulta:

$$Z_{a1} \;=\; \frac{p(0,t)}{q(L,t)} \;=\; \frac{p(L,t)}{q(L,t)}\, e^{L/l} \;=\; Z_{a2}\, e^{L/l}, \tag{120}$$

es decir,

$$Z_{a1} = \frac{\rho_o c}{A_o e^{L/l}} e^{L/l} = \frac{\rho_o c}{A_o}. \tag{121}$$

El valor $e^{L/l}$ es el cociente entre las áreas de la boca y de la garganta, A_L/A_o. En otras palabras, la impedancia acústica varía inversamente con el área de la sección transversal. Al igual que los transformadores eléctricos, la bocina se comporta como un *adaptador de impedancia acústica*.

Para frecuencias no tan altas, aunque sin dejar de cumplirse que $\lambda < 4\pi l$, la impedancia acústica vista hacia el interior de la garganta es

$$Z_{a1} = \frac{\rho_o c}{A_o} \frac{\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{L}{2l}\operatorname{tg}\theta\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{L}{2l}\operatorname{tg}\theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{L}{2l}\operatorname{tg}\theta\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{L}{2l}\operatorname{tg}\theta\right)}, \tag{122}$$

La frecuencia para la que

$$\lambda = 4\pi l, \tag{123}$$

se denomina *frecuencia de corte de la bocina*, f_c, y vale

$$f_c = \frac{c}{4\pi l}. \tag{124}$$

Por debajo de esta frecuencia resulta $\lambda > 4\pi l$. En este caso θ se vuelve imaginario y la bocina deja de comportarse satisfactoriamente.

Como ejemplo, para una bocina cuya garganta tiene 1 cm de radio, cuya boca tiene 6 cm de diámetro y cuyo largo es de 15 cm y que, por lo tanto, exhibe un valor de $l = 4{,}19$ cm, resulta una frecuencia de corte de 655 Hz. Este tipo de bocina pequeña se utiliza, habitualmente, por encima de 1,5 kHz.

Es de destacar que, en el rango útil de frecuencias, las bocinas no pueden considerarse como componentes circuitales con parámetros concentrados, ya que la longitud de onda puede ser bastante menor que las dimensiones de la bocina. Pero como sólo interesa lo que sucede en la garganta y en la boca, podemos utilizar el enfoque de *caja negra* y suponer, pasando por alto el retardo, que los parámetros son concentrados en cada extremo.

2.2.8. Relaciones de potencia para la bocina

Las ecuaciones (102), (104) y (105) pueden aplicarse al caso de una bocina. Llamando

$$\psi = \frac{L - x}{2l}\operatorname{tg}\theta \tag{125}$$

$$Z_{ae2} = R + jX \tag{126}$$

la ecuación (102) puede escribirse a partir de (108) y (109), como

$$w(t) = \frac{P_o{}^2 A_o}{(\rho_o c)^3} e^{L/l} \left[(R + j\,X)\,\text{sen}(\theta - \psi) + j\rho_o c\,\text{sen}\,\psi\right] \cdot \\ \left[\rho_o c\,\text{sen}(\theta + \psi) - j(R - j\,X)\,\text{sen}\,\psi\right] \tag{127}$$

La potencia *activa* es la parte real de $w(t)$:

$$W_a = \frac{P_o{}^2 A_o}{(\rho_o c)^3} e^{L/l} \begin{bmatrix} R\,\rho_o c\,\text{sen}(\theta - \psi)\text{sen}(\theta + \psi) - R\,X\,\text{sen}(\theta - \psi)\text{sen}\,\psi\; + \\ +\; X\,R\,\text{sen}(\theta - \psi)\text{sen}\,\psi + \rho_o c\,R\,\text{sen}^2\,\psi \end{bmatrix},$$

o bien,

$$W_a = \frac{P_o{}^2 A_o R}{(\rho_o c)^2} e^{L/l} \left[\text{sen}(\theta - \psi)\text{sen}(\theta + \psi) + \text{sen}^2\,\psi\right].$$

Operando trigonométricamente se llega a

$$W_a = \frac{P_o{}^2 A_o R}{(\rho_o c)^2} e^{L/l}\,\text{sen}^2\,\theta \tag{128}$$

Dado que θ no depende de x, resulta que la potencia activa entregada es constante. Este resultado era de esperar, ya que el modelo de la bocina no contempla pérdidas. Para frecuencias altas, $\theta \cong \pi/2$ y, por consiguiente, sen $\theta \cong 1$, obteniéndose la máxima potencia activa. Para la frecuencia de corte, $\theta = 0$, situación en la que la potencia se anula.

La potencia *reactiva* es la parte imaginaria de $w(t)$, dada por

$$W_r = \frac{P_o{}^2 A_o}{(\rho_o c)^3} e^{L/l} \begin{bmatrix} X\,\rho_o c\left(\text{sen}(\theta - \psi)\text{sen}(\theta + \psi) - \text{sen}^2\,\psi\right) - \\ -X^2\,\text{sen}(\theta - \psi)\text{sen}\,\psi + (\rho_o c)^2\,\text{sen}(\theta + \psi)\text{sen}\,\psi \end{bmatrix}. \tag{129}$$

Para el caso de una carga resistiva pura ($X = 0$),

$$W_r = \frac{P_o{}^2 A_o}{\rho_o c} e^{L/l}\,\text{sen}(\theta + \psi)\text{sen}\,\psi\,. \tag{130}$$

Para alta frecuencia, donde $\theta \cong \pi/2$, resulta

$$W_r \cong \frac{P_o{}^2 A_o}{2\rho_o c} e^{L/l}\,\text{sen}\left(\frac{L - x}{l}\,\text{tg}\,\theta\right). \tag{131}$$

o bien, utilizando (107) y despreciando 1 frente a $4\pi l/\lambda$ (válido para alta frecuencia),

$$W_r \cong \frac{P_o{}^2 A_o}{2\rho_o c} e^{L/l}\,\text{sen}\left(4\pi\frac{L - x}{\lambda}\right). \tag{132}$$

Esta potencia reactiva representa la energía acumulada dentro de la bocina en forma de ondas estacionarias.

Cuando la frecuencia se aproxima a la frecuencia de corte ($\theta \cong 0$), en cambio, resulta que la potencia reactiva tiende a 0, al igual que la potencia activa, pero lo hace más

lentamente y por lo tanto llega a predominar. Utilizando las aproximaciones lineales para el seno y la tangente de pequeños ángulos, se verifica fácilmente que

$$\frac{W_a}{W_r} \cong \frac{2R}{\rho_o c}\frac{l}{L-x}\theta \cong \frac{4R}{\rho_o c^2}\frac{l^2}{L-x}\sqrt{\omega^2 - \omega_c{}^2}\ , \tag{133}$$

lo cual significa que no sólo la potencia activa entregada a la garganta ($x = 0$) es muy pequeña sino que, además, el proceso es muy ineficiente, ya que la mayor parte de la potencia puesta en juego es reactiva, obligando a sobredimensionar la fuente.

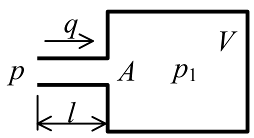
2.2.9. Conexiones acústicas en "serie" y en "paralelo"

En el caso de los sistemas acústicos también podemos combinar componentes conectándolos en serie y en paralelo. La conexión en serie se logra cuando dos componentes son circulados por el mismo caudal, es decir, están empalmados sin pérdidas o fugas. Esta situación es fácil de comparar con el caso eléctrico, dado que el caudal, como flujo de materia, es asimilable a la corriente, como flujo de carga.

La conexión en paralelo, por su parte, corresponde al caso en que la presión es la misma en ambos componentes. Dado que la presión, al igual que el potencial eléctrico, es una propiedad local, para que dos componentes estén en paralelo, sus extremos correspondientes deben estar a la misma presión. Si sólo en un extremo se cumple esto, dicho extremo equivale a un nudo en un circuito eléctrico

2.2.10. Ejemplos

Consideremos primeramente el resonador de Helmholtz, ilustrado en la figura 22. Consiste en una masa acústica formada por un pequeño conducto o cuello de sección A y longitud l que comunica con una compliancia acústica o cavidad caracterizada por un volumen V. Dado que la masa acústica y la boca de la cavidad se mueven a igual



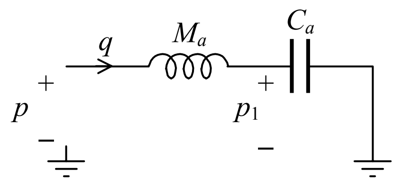


Figura 22. Un resonador de Helmholtz, formado por una cavidad conectada al exterior a través de un conducto, y su circuito equivalente.

velocidad y tienen la misma sección, el circuito equivalente está en serie. Utilizando las ecuaciones (71) y (77), la impedancia acústica es, despreciando la corrección de extremo de la longitud,

$$Z_a(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\rho_o l}{A}s + \frac{\rho_o c^2}{Vs} = \rho_o c\left(\frac{l\,s}{A\,c} + \frac{c}{Vs}\right). \tag{134}$$

Para excitaciones senoidales,

$$Z_a = \frac{\dot{P}}{\dot{Q}} = j\rho_0 c\left(\frac{l\,\omega}{A\,c} - \frac{c}{V\omega}\right). \tag{135}$$

Este circuito resonará a una frecuencia tal que la impedancia se anule, es decir

$$f_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{V\,l}}. \tag{136}$$

Un análisis más detallado del resonador de Helmholtz debe contemplar la corrección por extremo y la disipación, particularmente en el cuello. Dado que la resistencia acústica está sometida al mismo caudal que la masa acústica, también ésta está en serie.

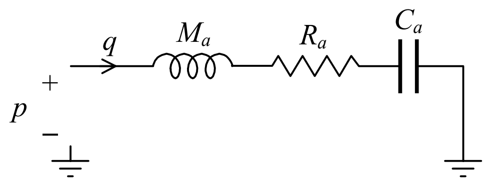


Figura 23. Modelo del resonador de Helmholtz que contempla la disipación en el cuello.

El valor de la resistencia acústica depende de si las dimensiones transversales del cuello son o no comparables con la capa límite (ver sección 2.2.3). Para conductos capilares corresponde aplicar la ecuación (84). Para conductos de mayores dimensiones, en cambio, la (85). Supondremos este último caso. Si a es el radio del cuello,

$$Z_a(j\omega) = j\rho_0 c\left(\frac{(l + 1{,}46\,a)\,\omega}{\pi a^2 c} - \frac{c}{V\omega}\right) + \frac{\sqrt{2\eta\rho_0\omega}}{2\pi a^3}(l + 2a). \tag{136}$$

Esta impedancia es mínima para la frecuencia de resonancia, que corresponde aproximadamente a la anulación de la parte imaginaria:[14]

$$f_0 \cong \frac{a\,c}{2\sqrt{\pi V(l + 1{,}46\,a)}}. \tag{137}$$

El valor de la resistencia en resonancia es

$$\mathbf{Re}\left(Z_a(j\omega_0)\right) = \sqrt{\frac{\eta\rho_0 c\,(l + 2a)^2}{2\pi^{3/2}a^5\sqrt{V(l + 1{,}46\,a)}}} \tag{138}$$

Este resultado puede utilizarse para evaluar la cantidad de potencia disipada en el resonador. Supongamos, por ejemplo, un resonador cuyo cuello tiene un radio de 0,5 cm y una longitud de 3 cm y cuya cavidad es de 100 cm^3. De la ecuación (137) se obtiene una frecuencia de resonancia de 251,95 Hz, y de (138) se obtiene una resistencia acústica en resonancia de 13539 N·s/m^5. Si la presión eficaz en la boca del resonador en la frecuen-

[14] Obsérvese que la parte real depende de la frecuencia, lo cual desplaza el mínimo ligeramente hacia las bajas frecuencias.

cia de resonancia es 1 Pa (correspondiente a un nivel de presión sonora de 94 dB) entonces la potencia disipada es

$$W_{dis} \;=\; \frac{P_{ef}^{\;2}}{\mathbf{Re}(Z_a)} \;=\; \frac{1^2}{13539}\,\mathrm{W} \;=\; 73{,}9\,\mu\mathrm{W}\,.$$

Es interesante comparar esta potencia con la que incidiría sobre un área igual a la de la boca en caso de tener una onda plana de igual presión eficaz:

$$W_{inc} \;=\; \frac{P_{ef}^{\;2}}{\rho_0 c}\pi a^2 \;=\; \frac{1^2}{414}\pi\cdot 0.005^2\ \mathrm{W} \;=\; 0{,}19\,\mu\mathrm{W}\,.$$

Un cálculo directo arrojaría un coeficiente de absorción sonora α equivalente de... ¡387! Sabemos que este resultado no es físicamente posible, ya que el resonador estaría absorbiendo 387 veces más potencia de la que recibe. En realidad la presencia del resonador perturba el campo sonoro cercano de modo tal que la presión sonora en las proximidades de la boca se incrementa considerablemente por su propia acción. La potencia que recibe es, por consiguiente, mucho mayor que la que recibiría en un campo sonoro plano sin perturbar.

Como segundo ejemplo consideremos el dispositivo indicado en la figura 24, consistente en dos cavidades interconectadas. El tubo de entrada es excitado por medio de un pistón rígido. Cada conducto estará caracterizado por una masa acústica (inertancia) y una resistencia acústica debida a la fricción. Las cavidades serán compliancias acústicas. El pistón se comporta, debido a su rigidez, como una fuente de velocidad mecánica y, cuando se multiplica su velocidad por la sección del primer conducto (A_2), como una fuente de caudal. El conexionado se indica a la derecha de la figura 24.

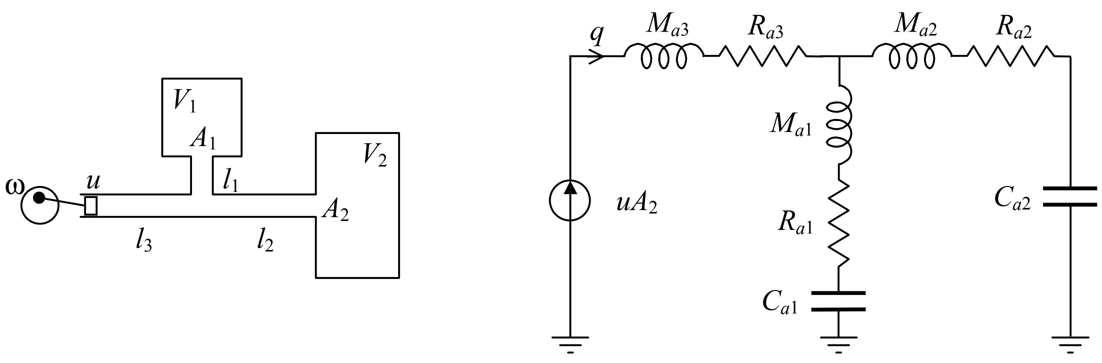


Figura 24. Un dispositivo acústico compuesto y su modelo circuital.

Los valores específicos de las resistencias acústicas dependen de si la disipación tiene lugar sólo en la capa límite o en toda la sección del tubo. Este último caso tiene lugar en el caso de conductos capilares. Si las longitudes de los conductos son comparables a sus dimensiones transversales, será necesario agregar la corrección de extremo.

2.2.11. Radiación acústica e impedancia de radiación

Muchos componentes acústicos tienen partes vibrátiles expuestas al aire libre. Los más notorios son los altavoces, los micrófonos y los extremos abiertos de los conductos.

La interacción entre dichas partes y el aire tiene dos aspectos interesantes: la emisión o radiación de energía acústica y la resistencia que opone el aire a la vibración, asimilable a una impedancia mecánica (o acústica), conocida como *impedancia de radiación*.

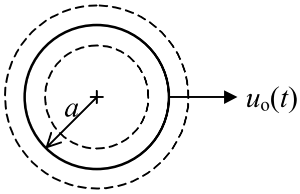


Figura 25. Una esfera pulsante como radiador acústico.

El radiador más elemental es una esfera de radio a pulsante con velocidad radial senoidal independiente de la presión (figura 25):[15]

$$u_o(t) \;=\; U_o\, e^{j\omega t}. \tag{139}$$

Resulta ser, por lo tanto, una fuente de velocidad que, multiplicada por el área de la esfera, se puede interpretar como una fuente de caudal:

$$q_o(t) \;=\; Q_o\, e^{j\omega t} \;=\; 4\pi a^2\, U_o\, e^{j\omega t}. \tag{140}$$

Se puede demostrar que la presión sonora a una distancia r del centro de la esfera está dada por (Miyara, 2003a)

$$p(r,t) \;=\; \rho_0 c U_0\, \frac{a}{r}\, \frac{j\frac{\omega}{c}a}{1 + j\frac{\omega}{c}a}\, e^{j\omega\left(t + \frac{a-r}{c}\right)}. \tag{141}$$

en tanto que el caudal total que atraviesa una esfera de radio r es

$$q(r,t) \;=\; 4\pi a^2\, U_0\, \frac{1 + j\frac{\omega}{c}r}{1 + j\frac{\omega}{c}a}\, e^{j\omega\left(t + \frac{a-r}{c}\right)}. \tag{142}$$

Dividiendo la ecuación (141) por la (142) se obtiene la impedancia acústica vista por la onda a una distancia r del centro de la esfera. Resulta:

$$Z_a(r) \;=\; \frac{\rho_0 c}{4\pi r^2}\, \frac{j\frac{\omega}{c}r}{1 + j\frac{\omega}{c}r}. \tag{143}$$

Esta impedancia acústica es compleja, lo cual significa que la potencia radiada tiene una componente activa y otra reactiva. Esta última es consecuencia de que cuando la esfera se dilata la capa de aire en contacto con ella no sólo se desplaza hacia afuera sino que además se expande (pues su superficie aumenta), acumulando cierta cantidad de energía

---

15 Como es habitual, trabajamos con exponenciales complejas para representar las funciones senoidales.

potencial elástica que debe ser entregada por la fuente. Al retornar a su tamaño de equilibrio dicha energía es devuelta a la fuente, de allí su carácter *reactivo*.

La impedancia acústica vista por la superficie de la fuente se denomina *impedancia acústica de radiación*, Z_{ar} y corresponde al caso en que $r = a$ en la ecuación anterior:

$$Z_{ar} \;=\; \frac{\rho_o c}{4\pi a^2}\,\frac{j\dfrac{\omega}{c}a}{1 + j\dfrac{\omega}{c}a} . \tag{144}$$

Esta impedancia de radiación representa la oposición del aire libre al desplazamiento de la superficie de la fuente. En la figura 26 se muestra el circuito equivalente, formado por una masa acústica M_a en paralelo con una resistencia acústica R_a. Para baja frecuencia la impedancia acústica es pequeña y casi puramente reactiva, mientras que para alta frecuencia tiende a ser resistiva y equivalente a la que opondría el aire a una onda plana sobre un área igual a la de la esfera pulsante.

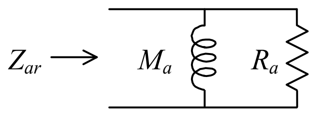


Figura 26. Impedancia acústica de radiación de una esfera pulsante.

Las componentes de potencia activa y reactiva son también de interés y pueden calcularse mediante las ecuaciones (104) y (105). Resulta:

$$W_a \;=\; 4\pi a^2 U_o{}^2 \rho_o c \frac{\left(\dfrac{\omega}{c}a\right)^2}{1 + \left(\dfrac{\omega}{c}a\right)^2} , \tag{145}$$

$$W_r \;=\; 4\pi a^2 U_o{}^2 \rho_o c \,\frac{a}{r}\,\frac{\dfrac{\omega}{c}a}{1 + \left(\dfrac{\omega}{c}a\right)^2} . \tag{146}$$

La potencia activa es independiente de r, ya que el modelo subyacente para la propagación de ondas que hemos adoptado es no disipativo y por lo tanto no hay pérdidas.[16] La potencia reactiva, en cambio, disminuye con la distancia, ya que a igual Δr la expansión relativa es menor cuanto mayor sea el radio de curvatura.[17]

De particular interés resulta el caso en que $r = a$, ya que permite determinar la potencia reactiva vinculada a la radiación y compararla con la potencia activa entregada por la fuente:

---

[16] Si se tiene en cuenta la absorción de energía sonora en el aire, la potencia acústica total de una onda sonora se reducirá exponencialmente con la distancia.

[17] En el límite, cuando la onda es plana, desaparece la potencia reactiva.

$$W_r = 4\pi a^2 U_o{}^2 \rho_o c \frac{\frac{\omega}{c} a}{1 + \left(\frac{\omega}{c} a\right)^2} = W_a \frac{c}{\omega a}. \qquad (147)$$

Vemos que para $\omega < c/a$ o, equivalentemente, $\lambda > 2\pi a$, la potencia reactiva supera a la potencia activa. Si bien la potencia reactiva no representa pérdidas en sí, ya que es energía intercambiada alternativamente entre la fuente y la carga (en este caso, el aire), en la práctica implica un sobredimensionamiento de la fuente con respecto a lo estrictamente necesario para obtener de ella determinada potencia acústica activa. Ello hace que las pérdidas asociadas a cualquier fuente aumenten, por lo cual la radiación se vuelve ineficiente.[18] En otras palabras, una fuente sonora pequeña en relación con la longitud de onda es un radiador ineficiente.

Independientemente de su ineficiencia desde el punto de vista práctico, la fuente esférica pequeña es un buen modelo para calcular el campo sonoro lejano (es decir, para $r >> \lambda$) de cualquier fuente pequeña. En efecto, se puede demostrar que para cualquier fuente pequeña con respecto a la longitud de onda ($a << \lambda$) cuya superficie vibre toda en fase el campo lejano depende solamente del caudal total Q_o en su superficie (Kinsler *et al.*, 1995), cantidad denominada *poder de la fuente*. De (141), si $\omega a << c$,

$$p(r,t) \cong j\rho_o c \frac{Q_o}{4\pi r} \frac{\omega}{c} e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}. \qquad (148)$$

Una fuente que satisface esta relación se denomina *fuente simple*. La importancia de las fuentes simples es que cualquier fuente extensa puede pensarse como superposición de fuentes simples. Esto permite calcular el campo sonoro lejano producido por dicha fuente.

2.2.12. Ejemplos de combinaciones de fuentes simples

Las fuentes simples pueden combinarse para formar *fuentes compuestas*, siendo el ejemplo más sencillo el de dos fuentes simples de poder Q_o separadas por una distancia d, como se muestra en la figura 27. Las presiones sonoras instantáneas provocadas en el punto X por ambos emisores se suman. Ambas estarán dadas por expresiones del tipo de la ecuación (148), reemplazando r por r_1 y r_2 respectivamente. Así, por ejemplo,

$$r_1 = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta - d/2)^2}. \qquad (150)$$

Si $d << r$ entonces vale la siguiente aproximación:

$$r_1 \cong r - \frac{d}{2}\mathrm{sen}\,\theta. \qquad (151)$$

[18] Esta situación es enteramente análoga a la que tiene lugar en el caso de los circuitos eléctricos. Una fuente de tensión senoidal que entrega potencia a una carga fuertemente reactiva debe hacerlo mediante una corriente elevada, lo cual implica importantes pérdidas térmicas en la resistencia de los conductores.

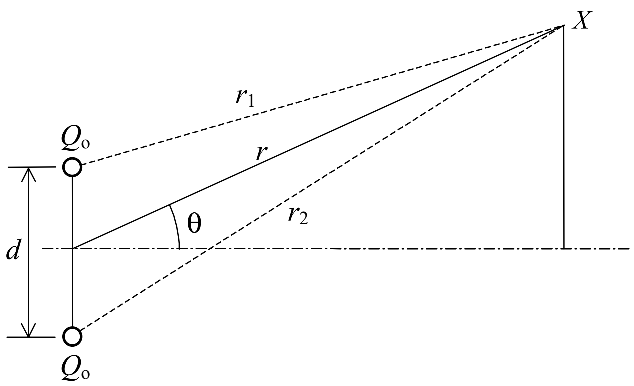


Figura 27. Una fuente compuesta formada por dos fuentes simples radiando en fase.

Análogamente,

$$r_2 \cong r + \frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta . \tag{152}$$

La presión total será, entonces,

$$p(r,t) \cong j\rho_0 c \frac{Q_o}{4\pi}\frac{\omega}{c}\left(\frac{e^{j\omega(t - r_1/c)}}{r_1} + \frac{e^{j\omega(t - r_2/c)}}{r_2}\right). \tag{153}$$

Dado que $d/2 << r$, el error de amplitud que se origina si r_1 y r_2 se aproximan por r en los denominadores será muy pequeño, no así el error de fase si se usara la misma aproximación en los exponentes de las exponenciales complejas.[19] Por consiguiente,

$$p(r,t) \cong j\rho_0 c \frac{Q_o}{4\pi r}\frac{\omega}{c} e^{j\omega(t - r/c)}\left(e^{j\omega\frac{d}{2c}\operatorname{sen}\theta} + e^{-j\omega\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta}\right). \tag{154}$$

es decir

$$p(r,t) \cong j\rho_0 c \frac{Q_o}{2\pi r}\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\operatorname{sen}\theta\right) e^{j\omega(t - r/c)}. \tag{155}$$

Esta expresión es similar a la de la ecuación (148) salvo porque aparece una dependencia del ángulo θ a través del factor 2 cos[($\omega d/2c$) sen θ]. Esto da origen a un patrón direccional de radiación cuya forma depende de la relación entre la separación de las fuentes y la longitud de onda (pues $\omega/2c = \pi/\lambda$). En la figura 28 se muestran los diagramas correspondientes a varias separaciones.[20]

Vemos que cuando la separación es pequeña con respecto a la longitud de onda, la radiación es casi omnidireccional,[21] mientras que para separaciones de varias longitudes de onda la distribución angular de la presión sonora tiene una estructura fuertemente lobular.

---

[19] El error consiste en la aparición de una pequeña componente en cuadratura y un error de segundo orden en el módulo.

[20] Los diagramas están en dB, por lo que sólo puede representarse una parte, por ejemplo hasta −25 dB.

[21] Esto es coherente con el hecho de que la combinación tiende a asimilarse a una fuente simple.

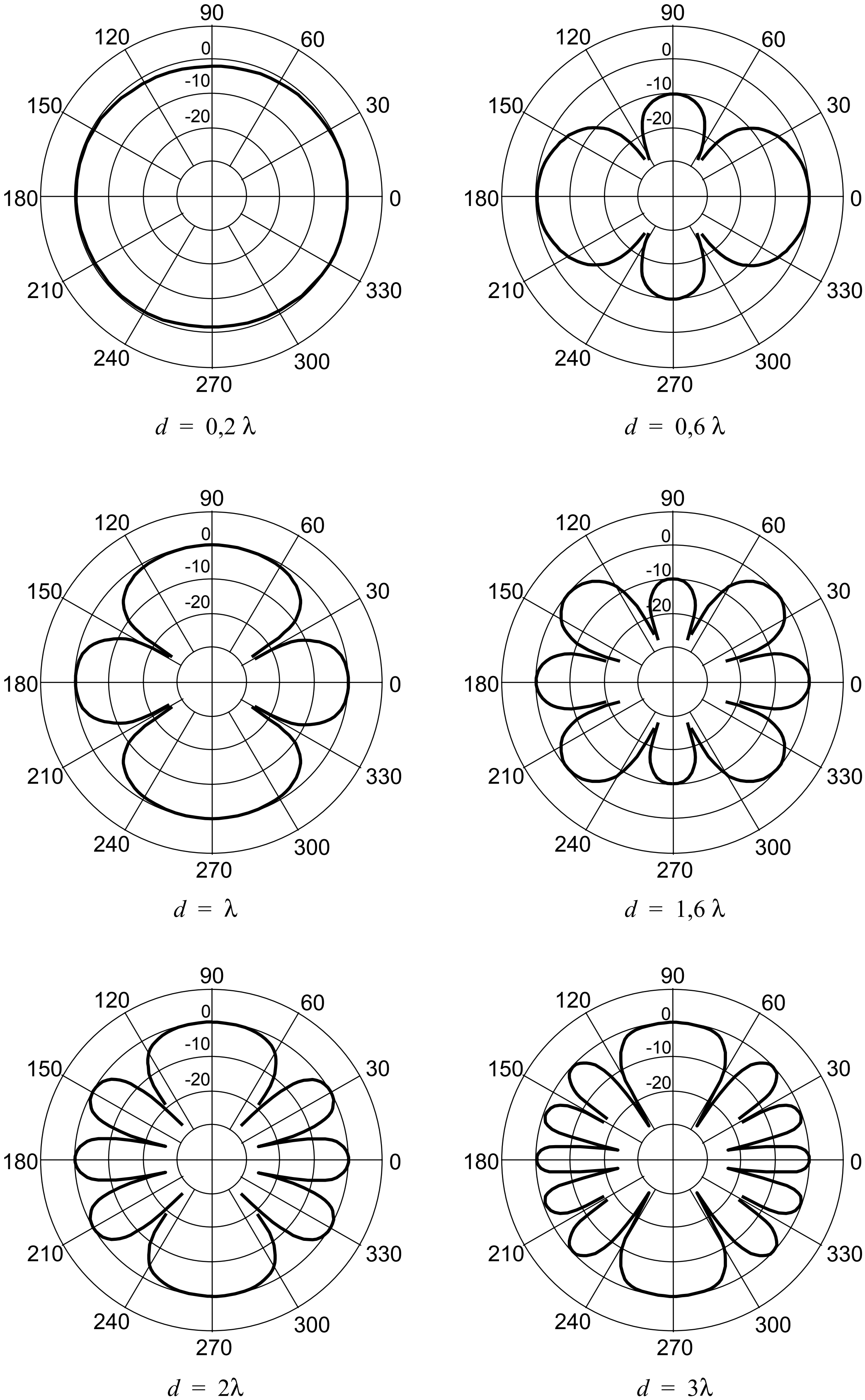


Figura 28. Diagrama direccional de una fuente formada por dos fuentes simples en fase, para diversas relaciones entre la separación de las fuentes y la longitud de onda emitida.

Consideremos ahora el caso de un *dipolo acústico*, combinación formada por dos fuentes simples en contrafase (figura 29).

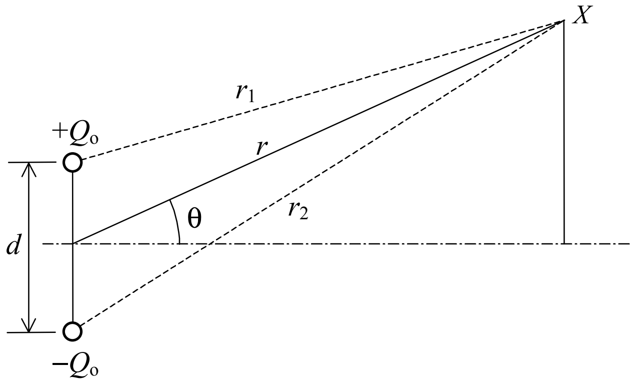


Figura 29. Un dipolo acústico, formada por dos fuentes simples de igual poder radiando en contrafase.

Utilizando las ecuaciones (151) y (152), la presión total será, ahora,

$$p(r,t) \;\cong\; j\rho_0 c\,\frac{Q_0}{4\pi}\,\frac{\omega}{c}\left(\frac{e^{j\omega(t\,-\,r_1/c)}}{r_1}\;-\;\frac{e^{j\omega(t\,-\,r_2/c)}}{r_2}\right). \qquad (156)$$

Para $d/2 << r$ vale idéntica consideración a la efectuada anteriormente, por lo cual podemos escribir,

$$p(r,t) \;\cong\; j\rho_0 c\,\frac{Q_0}{4\pi r}\,\frac{\omega}{c}\,e^{j\omega(t\,-\,r/c)}\left(e^{j\omega\frac{d}{2c}\operatorname{sen}\theta}\;-\;e^{-j\omega\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta}\right). \qquad (157)$$

es decir

$$p(r,t) \;\cong\; -\rho_0 c\,\frac{Q_0}{2\pi r}\,\frac{\omega}{c}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega\,d}{2c}\operatorname{sen}\theta\right)e^{j\omega(t\,-\,r/c)}. \qquad (158)$$

Esta expresión difiere de la (155) en la eliminación de la rotación (representada por la unidad imaginaria j) y en que la dependencia del ángulo θ es ahora a través del factor 2 sen[($\omega d/2c$) sen θ]. El patrón direccional se anula, en todos los casos, para $\theta = 0$ (esto es, en la dirección perpendicular al segmento que une ambas fuentes). En la figura 30 se muestran los diagramas polares correspondientes a varias separaciones. Cuando la separación es pequeña con respecto a la longitud de onda el diagrama direccional tiene dos lóbulos muy pequeños (ver el caso en que $d = 0{,}05\,\lambda$). Para separaciones de varias longitudes de onda la distribución angular de la presión sonora también presenta una estructura fuertemente lobular.

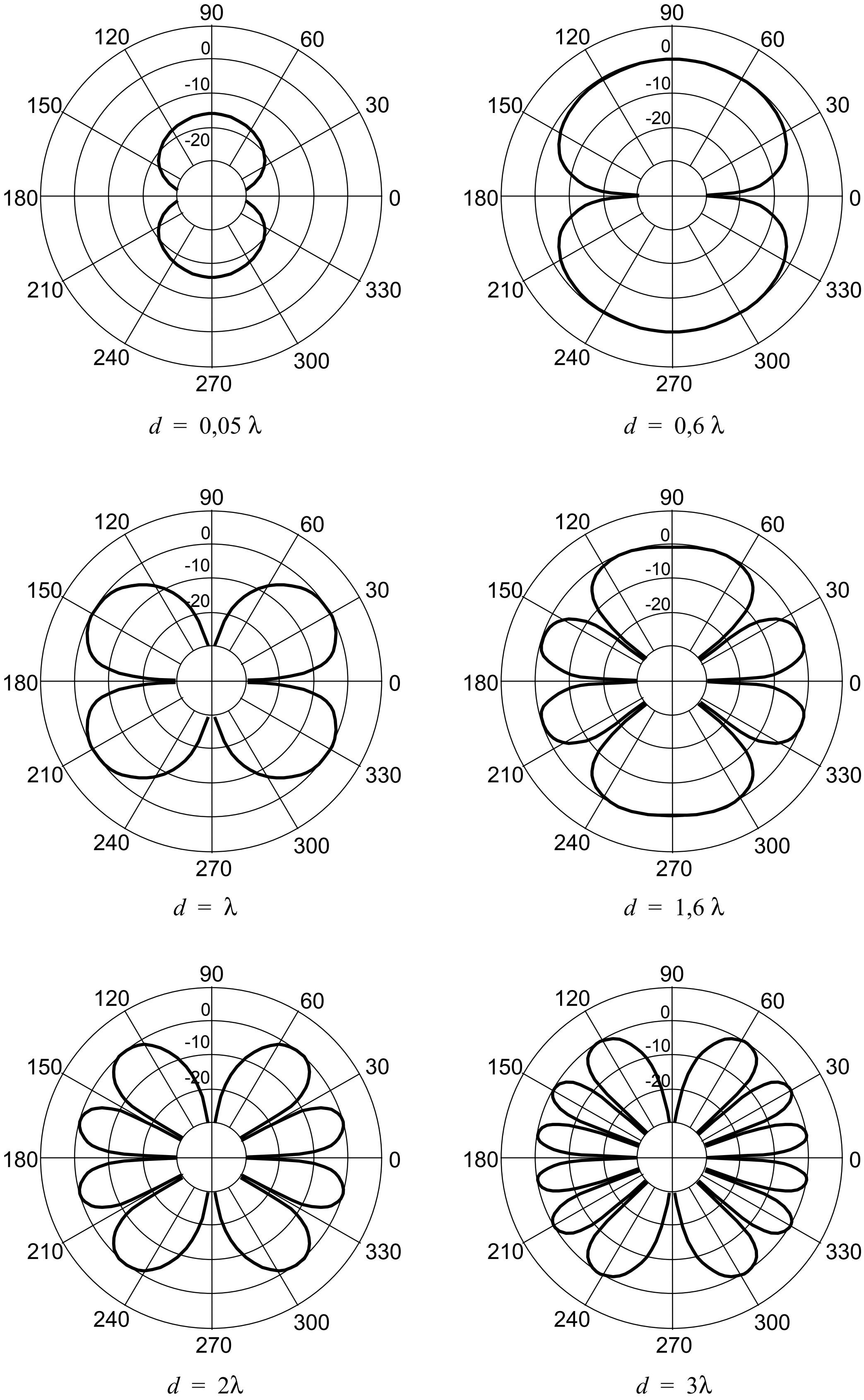


Figura 30. Diagrama direccional de un dipolo acústico, formado por dos fuentes simples en contrafase, para diversas relaciones entre la separación de las fuentes y la longitud de onda emitida.

2.2.13. Pistón circular plano

Un elemento de extraordinaria importancia en la electroacústica es un pistón circular que vibra en dirección normal al plano que lo contiene. Existen tres configuraciones de interés conceptual o práctico: 1) Montado en una pared plana infinita (en la práctica, de dimensiones mucho mayores que la longitud de onda); 2) Colocado en el extremo de un tubo largo; 3) Con ambas caras expuestas al aire libre.

En el primer caso la pared constituye un medio para separar las ondas radiadas a ambos lados del pistón. Es representativo de un altavoz montado en un gabinete o *bafle* cerrado. El segundo caso corresponde a la radiación desde el extremo de un tubo no capilar dentro del cual se propagan ondas planas.[22] El tercer caso corresponde a un parlante sin bafle. El análisis detallado de estos casos de radiación es matemáticamente dificultoso, por lo cual daremos sólo los resultados.

Consideremos primero un pistón de radio a que se mueve con velocidad lineal $U_o e^{j\omega t}$ sobre una pared plana infinita (figura 31). La presión sonora en un punto X

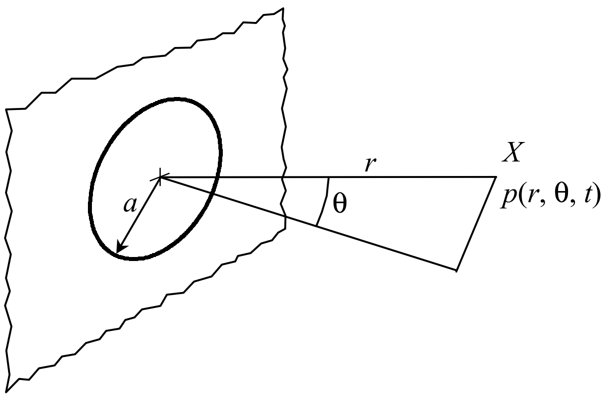


Figura 31.Un pistón circular rígido sobre una pared plana infinita.

ubicado a una distancia $r >> \lambda$ (campo sonoro lejano) y sobre un ángulo θ del eje del pistón es (Morse, 1981)

$$p(r,\theta,t) \;=\; j\rho_o c \frac{Q_o}{2\pi r}\frac{\omega}{c}\,\frac{2J_1\left(\frac{\omega a}{c}\,\text{sen}\,\theta\right)}{\frac{\omega a}{c}\,\text{sen}\,\theta}\,e^{j\omega(t\;-\;r/c)}, \qquad (159)$$

donde Q_o es el *poder* del pistón, dado por

$$Q_o \;=\; U_o \pi a^2, \qquad (160)$$

y J_1(x) es la función de Bessel de primera especie de orden 1, dada por la serie de potencias (Abramowitz, Stegun, 1972)

$$J_1(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}n!(n+1)!} \qquad (161)$$

[22] En un tubo no capilar, las ondas son aproximadamente planas excepto en la capa límite próxima a la superficie interior.

En la figura 32 se muestran las gráficas de las funciones $J_1(x)$ y $2J_1(x)/x$. Esta última, que interviene en la expresión de $p(r, \theta, t)$, tiene un comportamiento similar a un coseno muy atenuado para valores altos de x, por lo que el patrón direccional tendrá una similitud con el de dos fuentes simples, pero con los lóbulos laterales muy atenuados en alta frecuencia. Dado que $2J_1(x)/x \to 1$ para $x \to 0$, para $\theta = 0^\circ$ la presión es el doble (6 dB mayor) de la de una fuente simple de igual poder, como puede constatarse comparando con la ecuación (148). Lo mismo sucede en baja frecuencia (es decir cuando el tamaño del pistón es pequeño comparado con la longitud de onda) para cualquier ángulo θ, y por consiguiente la radiación es casi omnidireccional en el hemisferio expuesto. Así, para $a < \lambda/4$ (el diámetro es menor que media longitud de onda) la caída hacia los costados ($\theta = 90^\circ$) es menor de 3 dB. En la figura 33 se muestran los diagramas polares para varias relaciones entre el radio del pistón y la longitud de onda.

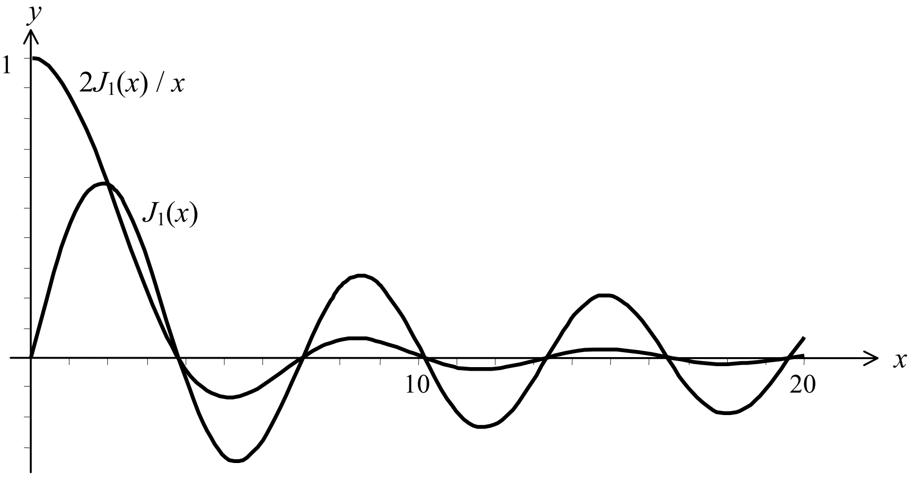


Figura 32.Función de Bessel de primera especie de orden 1, $J_1(x)$. También se muestra la función $2J_1(x)/x$, que interviene en la directividad de un pistón plano sobre una pared infinita.

La impedancia acústica de radiación que se opone al movimiento del pistón puede evaluarse mediante la siguiente fórmula (Pierce, 1991):

$$Z_{ar} = \frac{\rho_o c}{\pi a^2}\left[1 - \frac{2J_1\left(\frac{2\omega a}{c}\right)}{\frac{2\omega a}{c}} + j\frac{2\mathbf{H}_1\left(\frac{2\omega a}{c}\right)}{\frac{2\omega a}{c}}\right], \tag{162}$$

donde J_1(x) es la función de Bessel de primera especie de orden 1, ya descripta, y $H_1(x)$ es la función de Struve de orden 1, dada por (Abramowitz, Stegun, 1972)

$$\mathbf{H}_1(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)!}x^{2n}\,. \tag{163}$$

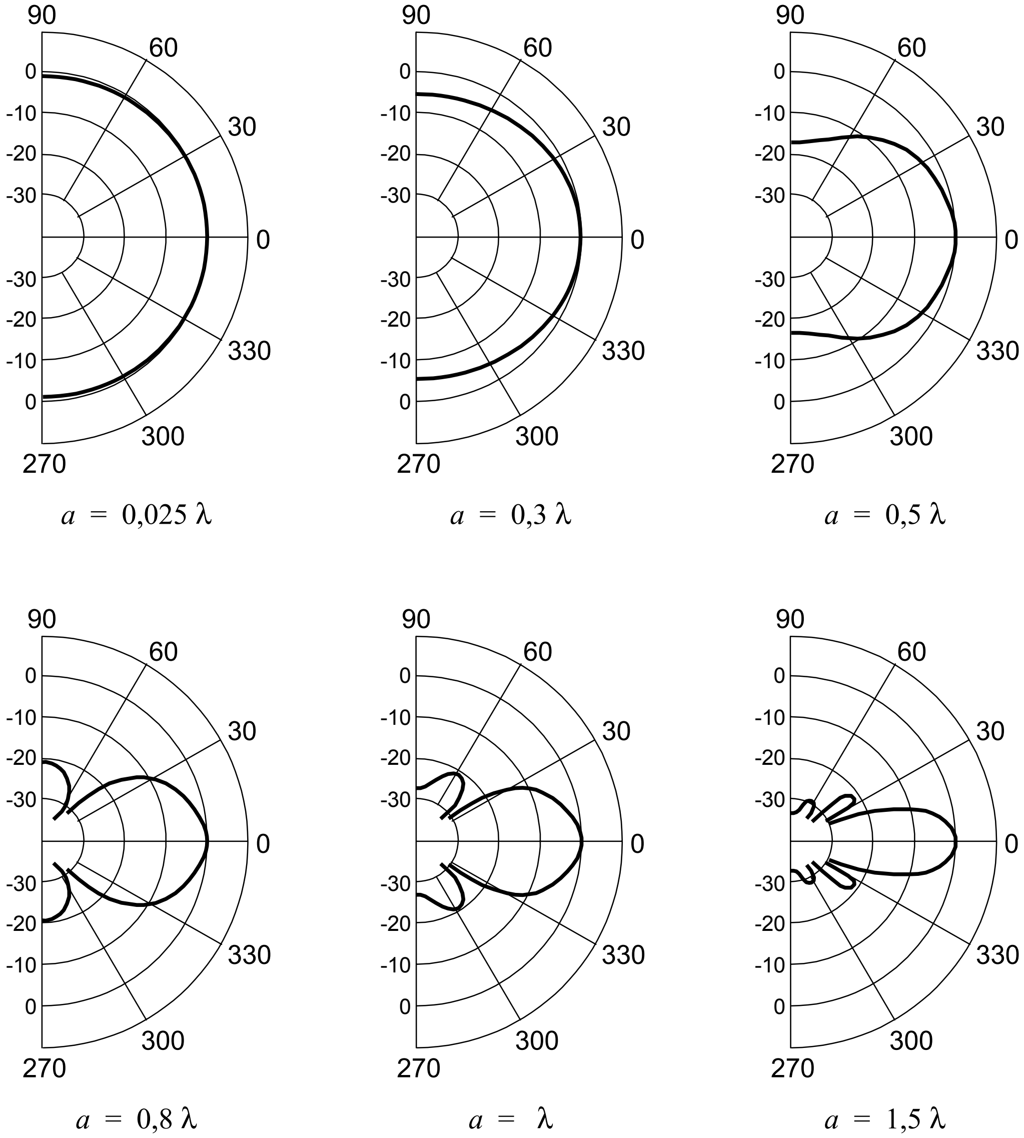


Figura 33. Diagrama direccional de un pistón circular rígido de radio *a* que vibra al ras de una pared plana infinita, para diversas relaciones entre el radio y la longitud de onda emitida. La respuesta se ha normalizado de manera que su máximo sea 0 dB para θ = 0º. Dicho máximo es 6 dB mayor que el correspondiente a una fuente simple de igual poder.

En la figura 34 se muestran las gráficas de las partes real e imaginaria de la impedancia acústica de radiación normalizada en amplitud y en frecuencia. Para valores de x del orden de 10 o mayor la convergencia de la serie (163) es muy lenta y tiende a desbordar la aritmética del software de cálculo, por lo que es preferible la siguiente aproximación asintótica:

$$\mathbf{H}_1(x) \;\cong\; \frac{2}{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sen}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right), \qquad x >> 1. \qquad (164)$$

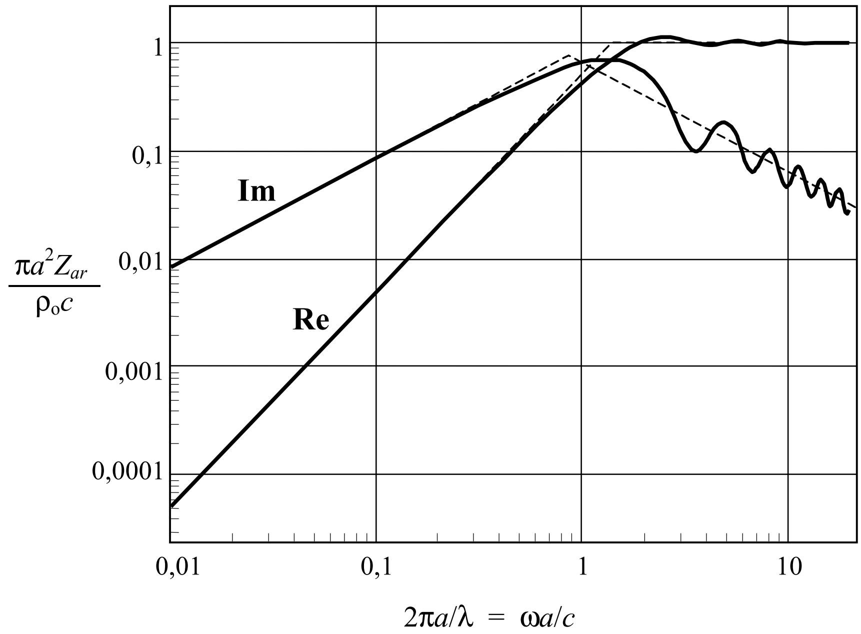


Figura 34. Partes real e imaginaria de la impedancia acústica de radiación normalizada de un pistón circular rígido en un bafle plano infinito. Las líneas de trazo representan las aproximaciones asintóticas para baja frecuencia y alta frecuencia respectivamente.

Si podemos prescindir de las fluctuaciones del seno atenuado por la raíz cuadrada de $2/\pi x$, se puede obtener una aproximación todavía más simple:

$$\mathbf{H}_1(x) \cong 2/\pi, \qquad x >> 1. \tag{165}$$

Asimismo, para $x << 1$ es posible aproximar la serie por su término de menor grado, es decir el cuadrático:

$$\mathbf{H}_1(x) \cong \frac{2}{3\pi} x^2, \qquad x << 1. \tag{166}$$

También la función de Bessel admite aproximaciones asintóticas. Así, para valores altos de x,

$$J_1(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4} \right), \qquad x >> 1. \tag{167}$$

y para valores bajos,

$$J_1(x) \cong \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16}, \qquad x << 1. \tag{168}$$

En este caso debieron tomarse dos términos ya que en el cálculo de $1 - 2J_1(x)/x$, como se comprueba fácilmente, el primero quedará cancelado.

Con las aproximaciones precedentes, podemos simplificar el cálculo de impedancia acústica de radiación. Para baja frecuencia, resulta, reemplazando (168) y (166) en (162), con $x = 2\omega a/c$:

$$Z_{ar} \cong \frac{\rho_0 c}{\pi a^2}\left(\frac{a^2\omega^2}{2c^2} + j\frac{8a\omega}{3\pi c}\right), \qquad \omega << c/2a . \tag{169}$$

Análogamente, de (164) y (162), despreciando términos superiores,

$$Z_{ar} \cong \frac{\rho_o c}{\pi a^2}\left(1 + j\frac{2c}{\pi a\omega}\right), \qquad \omega >> c/2a. \tag{170}$$

Resultará interesante poder reemplazar la impedancia de radiación por un modelo circuital con componentes resistivos y reactivos (masa acústica y compliancia acústica) que en baja y alta frecuencia se aproxime asintóticamente a los valores de impedancia obtenidos en (169) y (170).

Un circuito de tal naturaleza es el que se muestra en la figura 35, constituido por una compliancia, una masa y dos resistencias acústicas (Beranek, 1961). La impedancia, obtenida por análisis circuital directo, es

$$Z(j\omega) = \frac{M_{a1} j\omega\left(R_{a1} + R_{a2} + R_{a1}R_{a2}C_{a1} j\omega\right)}{R_{a1} + R_{a2} + (M_{a1} + R_{a1}R_{a2}C_{a1})j\omega + M_{a1}R_{a1}C_{a1}(j\omega)^2} . \tag{171}$$

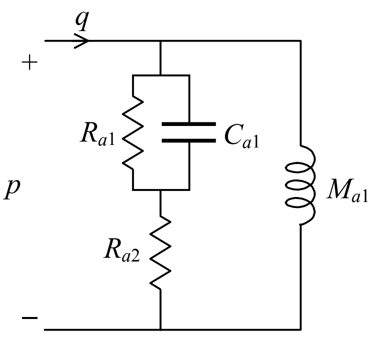


Figura 35. Circuito asintóticamente equivalente en alta frecuencia y en baja frecuencia a la impedancia acústica de radiación de un pistón rígido sobre un bafle plano infinito (Beranek, 1961).

Podemos abreviar la notación observando que Z es de la forma

$$Z = \frac{j\omega A + (j\omega)^2 B}{D + j\omega E + (j\omega)^2 F}, \tag{172}$$

donde

$$
\begin{aligned}
A &= M_{a1}(R_{a1} + R_{a2}) \\
B &= M_{a1}C_{a1}R_{a1}R_{a2} \\
D &= R_{a1} + R_{a2} \\
E &= M_{a1} + R_{a1}R_{a2}C_{a1} \\
F &= M_{a1}C_{a1}R_{a1}
\end{aligned}
\qquad (173)
$$

Podemos ahora aproximar (172) y, por lo tanto, (171), asintóticamente para alta y baja frecuencia. Para ello, conservaremos en cada caso sólo los dos términos más significativos en el numerador y el denominador. Así, en baja frecuencia, el término constante prevalecerá frente al cuadrático, y en alta frecuencia, será el término independiente el que se pueda despreciar. Resulta, para $\omega \to 0$,

$$Z \cong \frac{j\omega A + (j\omega)^2 B}{D + j\omega E}. \qquad (174)$$

Multiplicando arriba y abajo por el conjugado del denominador, operando y conservando los términos más significativos, se obtiene

$$Z \cong j\omega\frac{A}{D} + \frac{AE - BD}{D^2}\omega^2. \qquad (175)$$

Análogamente, para $\omega \to \infty$,

$$Z = \frac{j\omega A + (j\omega)^2 B}{j\omega E + (j\omega)^2 F}, \qquad (176)$$

Operando como en el caso anterior, resulta

$$Z = \frac{B}{F} + \frac{BE - AF}{F^2}\frac{j}{\omega}, \qquad (177)$$

Comparando (169) con (175) y (170) con (177) se obtiene, finalmente,

$$M_{a1} = \frac{8\rho_o}{3\pi^2 a}, \qquad (178a)$$

$$R_{a2} = \frac{\rho_o c}{\pi a^2}, \qquad (178b)$$

$$R_{a1} = \frac{\rho_o c}{\pi a^2}\left(\frac{128}{9\pi^2} - 1\right), \qquad (178c)$$

$$C_{a1} = \frac{a^3}{\rho_o c^2\left(\frac{3}{8} - \frac{2}{\pi^2}\right)}. \qquad (178d)$$

En alta frecuencia la impedancia de radiación se aproxima muy bien por $R_{a2} = \rho_o c / \pi a^2$, es decir, la impedancia acústica de un área πa^2 (igual a la del pistón) de un radiador plano. En baja frecuencia (longitud de onda mucho mayor que el radio) se aproxima a la masa acústica de un cilindro de aire de base igual al pistón y longitud $8a/3\pi = 0{,}849\ a$.[23]

Consideremos ahora un pistón circular plano en el extremo de un tubo semiinfinito, como se muestra en la figura 36. El caso es similar al de un tubo de radio pequeño comparado con la longitud de onda con el extremo abierto. Si bien no daremos las fórmulas correspondientes para el cálculo del patrón direccional (ver Levin *et al.*, 1948), las mismas han sido aplicadas por Beranek para algunas relaciones entre el radio y la longitud de onda (Beranek, 1961). En la figura 36 se dan algunos ejemplos.

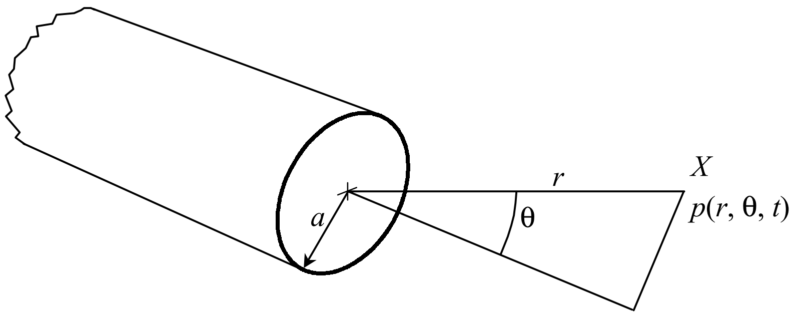


Figura 36. Un pistón circular rígido en el extremo de un tubo semiinfinito.

Como se puede apreciar, a diferencia del caso anterior, es posible la radiación hacia atrás ($\theta > \pi/2$).

Las partes real e imaginaria de la impedancia acústica de radiación se muestran en la figura 38. Esta impedancia puede modelizarse con un circuito similar al de la figura 35 con los parámetros siguientes:

$$M_{a1} = 0{,}1952 \frac{\rho_o}{a}, \tag{179a}$$

$$R_{a2} = \frac{\rho_o c}{\pi a^2}, \tag{179b}$$

$$R_{a1} = 0{,}504 \frac{\rho_o c}{\pi a^2}, \tag{179c}$$

$$C_{a1} = 3{,}1 \frac{a^3}{\rho_o c^2}. \tag{179d}$$

Igual que en el caso anterior, en alta frecuencia la impedancia de radiación se aproxima a $R_{a2} = \rho_o c / \pi a^2$, es decir, la impedancia acústica de un área πa^2 de un

[23] Observar que esta longitud equivale a la corrección por extremo de la masa acústica del aire en un tubo con pestaña (ecuación (71)).

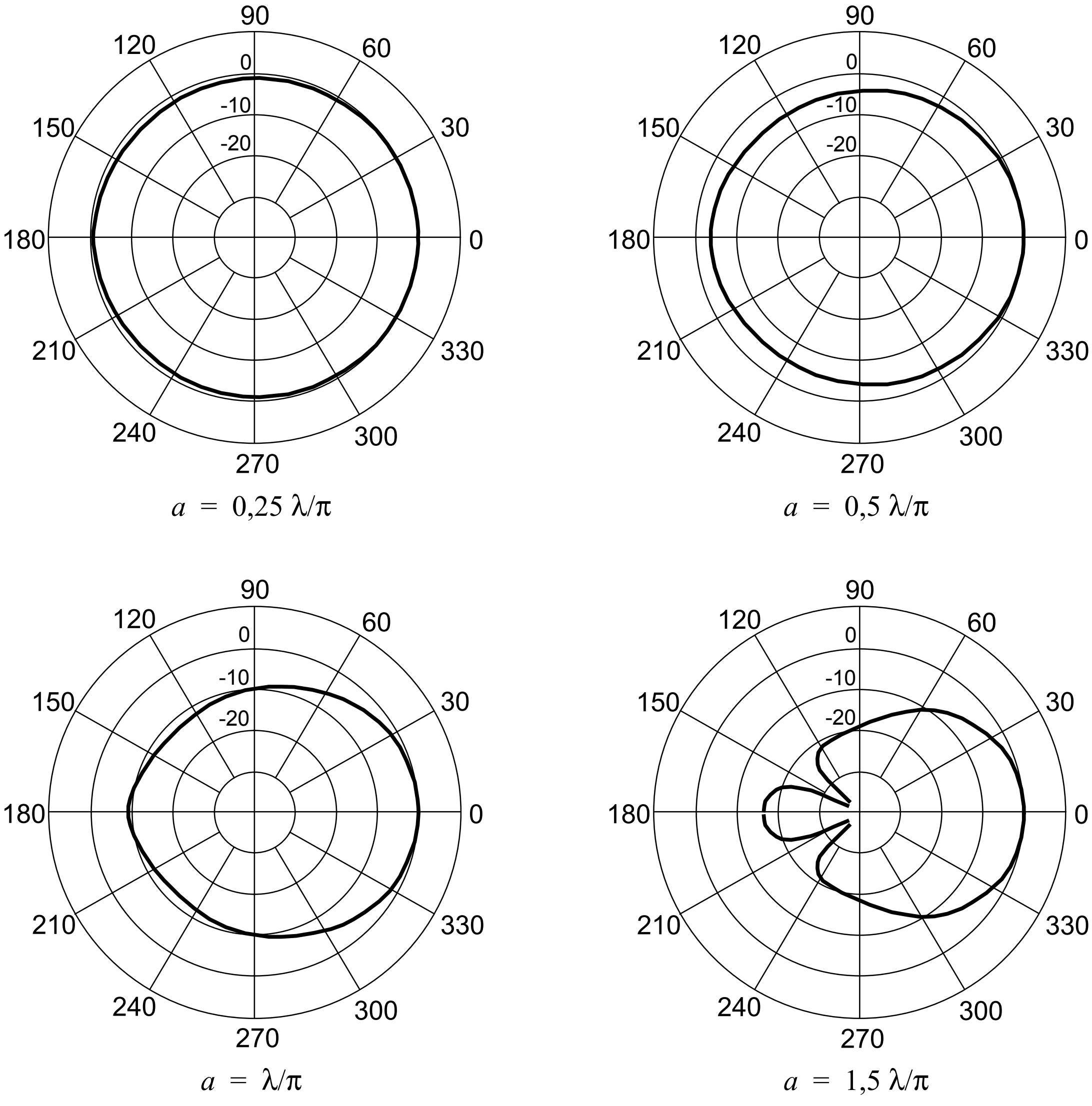


Figura 37. Diagrama direccional de un pistón circular rígido de radio *a* que vibra en el extremo de un tubo rígido semiinfinito, para diversas relaciones entre el radio y la longitud de onda emitida (Beranek, 1961).

radiador plano. En baja frecuencia, equivale a la masa acústica de un cilindro de aire de base igual a la del pistón y longitud igual a 0,1952 πa = 0,613 a.[24]

3. Principios de la transducción electroacústica

Los fenómenos de transducción electroacústica pueden analizarse en general descomponiéndolos en dos fases de transducción: electromecánica y mecanoacústica. La transducción electromecánica puede aprovechar diversos principios físicos como las interacciones electromagnéticas, electrostáticas y piezoeléctricas. Salvo por las pérdidas causadas por los eventuales componentes disipativos, cada uno de estos fenómenos es

[24] Esta longitud equivale a la corrección por extremo de la masa acústica del aire en un tubo sin pestaña (ecuación (70)).

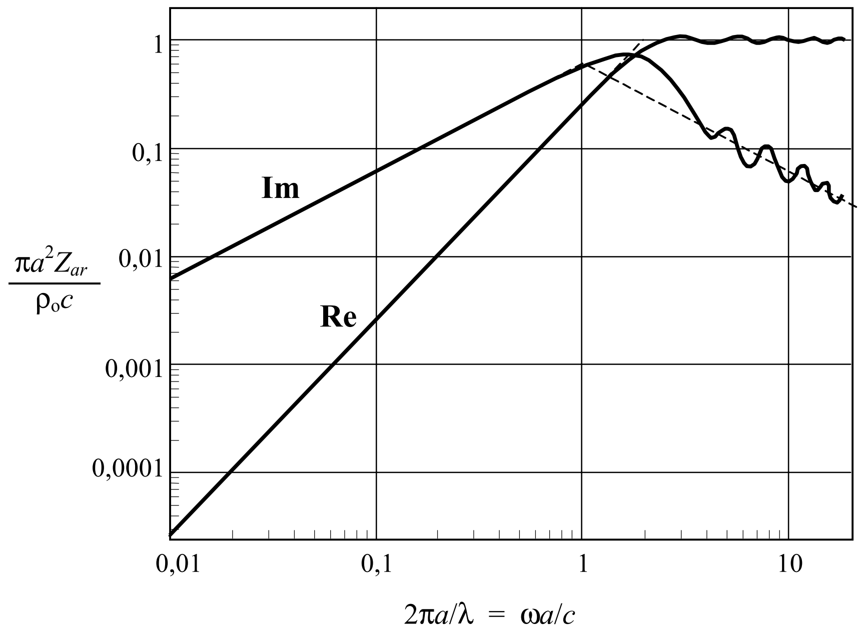


Figura 38. Partes real e imaginaria de la impedancia acústica de radiación normalizada de un pistón circular rígido en el extremo de un tubo sin pestaña. Las líneas de trazo representan las aproximaciones asintóticas para baja frecuencia y alta frecuencia respectivamente (Beranek, 1961).

reversible, lo cual significa que es posible transformar energía mecánica en eléctrica o viceversa. La primacía de uno u otro sentido de transducción en cada caso concreto obedece más a razones constructivas que conceptuales y, de hecho, ciertos transductores pueden cumplir ambas funciones.[25] El análisis de los transductores requiere en general plantear un sistema de dos ecuaciones con dos variables pertenecientes a un dominio (por ejemplo eléctrico) y otras dos pertenecientes al otro (por ejemplo, mecánico).

3.1. Transducción electromagnetomecánica

La mayoría de los altavoces y muchos micrófonos basan su funcionamiento en las interacciones electromagnetomecánicas que tienen lugar en un conductor en movimiento por el que circula una corriente eléctrica en presencia de un campo magnético (figura 39). Supongamos que el conductor tiene longitud l y es perpendicular a un campo magnético de inducción B, y que por él circula una corriente i. Entonces aparecerá sobre él una fuerza perpendicular al campo y al conductor dada por

$$f = B\, l\, i. \tag{179}$$

Si además el conductor se desplaza con velocidad u perpendicular al campo magnético y a su propia dirección, se creará entre sus extremos una fuerza electromotriz e de valor

$$e = B\, l\, u. \tag{180}$$

[25] Un ejemplo de ello es el pequeño altavoz utilizado en muchos porteros eléctricos, que también es aprovechado como micrófono.

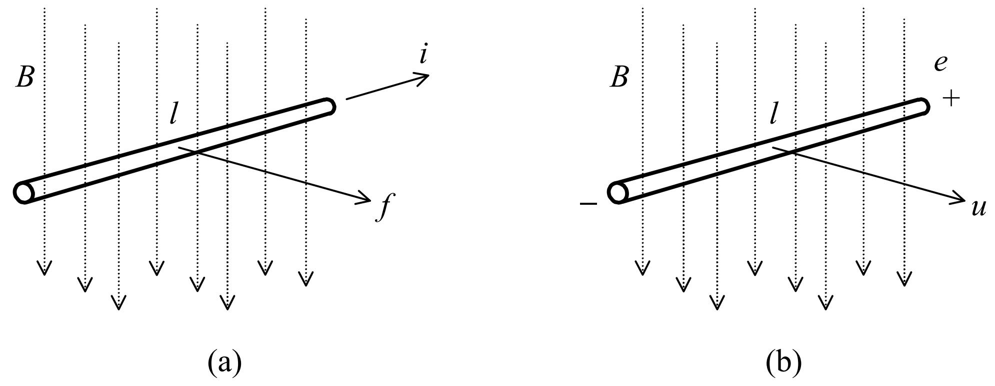


Figura 39. (a) Fuerza f generada sobre un conductor de longitud l inmerso en un campo magnético B por el que circula una corriente eléctrica i. (b) Fuerza electromotriz e inducida en el conductor cuando se mueve con una velocidad u.

Las ecuaciones (179) y (180) vinculan variables eléctricas (i, e) con variables mecánicas (u, f), y lo hacen de modo tal que se conserva la potencia. En efecto, si la tensión aplicada al conductor es v y por él circula una corriente i, la potencia eléctrica entregada será

$$W_e = v\,i.$$

Por la segunda ley de Kirchhoff la fuerza electromotriz inducida deberá igualar a la tensión aplicada, de modo que

$$W_e = e\,i = B\,l\,u\,\frac{f}{B\,l} = f\,u = W_m. \qquad (181)$$

Vemos que la potencia eléctrica coincide con la potencia mecánica que la fuerza generada desarrolla sobre la carga mecánica al obligarla a moverse con velocidad u.[26]

Con la analogía de movilidad (velocidad equivalente a tensión y fuerza equivalente a corriente), las relaciones (179) y (180) corresponden a un transformador, mientras que con la analogía de impedancia corresponden a un girador (figura 40).



Figura 40. Modelos de un transductor de bobina móvil. A la izquierda, utilizando la analogía de movilidad. A la derecha, mediante la analogía de impedancia.

[26] En este análisis se supuso que el conductor es ideal, es decir que su resistencia y su inductancia son nulas. En el caso real, una parte de la potencia eléctrica se disipará en la parte resistiva y otra será entregada en forma de potencia reactiva modificando el campo magnético total.

Cuando un agente o generador eléctrico externo impone la circulación de una corriente por el primario, en el secundario aparecerá una fuerza capaz de mover una carga mecánica. En ese caso estaremos en presencia de un transductor *electromecánico*, como un motor o un altavoz. Cuando, contrariamente un agente externo imprima un movimiento (velocidad), se generará una fuerza electromotriz capaz de excitar una carga eléctrica. Es el caso del transductor mecanoeléctrico, como una dínamo o un micrófono.

3.2. Transducción electrostática

Algunos altavoces y gran cantidad de micrófonos se basan en las interacciones electrostático-mecánicas que se presentan en un condensador una de cuyas placas es móvil. Consideremos un condensador con dieléctrico de aire, como el de la figura 41,

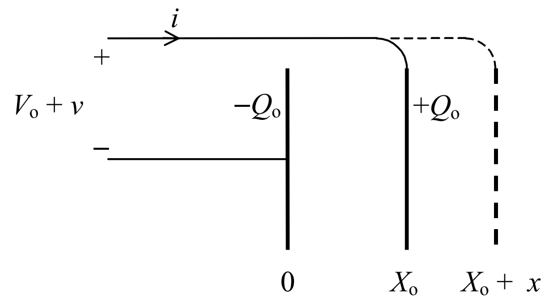


Figura 41. La placa inicialmente ubicada en X_o se desplaza hasta una nueva posición $X_o + x$.

cuyas placas han sido provistas de una carga $\pm Q_o$ por medio de una tensión V_o. Se debe cumplir

$$C_o V_o = Q_o, \tag{182}$$

donde C_o es la capacidad en equilibrio, dada por

$$C_o = \varepsilon_o \frac{A}{X_o}, \tag{183}$$

siendo A el área de las placas, X_o, la separación entre ellas en equilibrio y ε_o, la constante dieléctrica del aire. Si ahora una de las placas se desplaza una distancia x, la capacidad pasará a valer

$$C = \varepsilon_o \frac{A}{X_o + x}. \tag{184}$$

Suponiendo que la carga se mantiene constante,[27] la tensión será

[27] Si bien esto no es rigurosamente cierto, podremos suponerlo aproximadamente válido si la corriente es pequeña. Más adelante tendremos en cuenta la variación debida a la corriente.

$$V_o + v = \frac{Q_o}{\varepsilon_o A}(X_o + x) \tag{185}$$

De (182) y (183) se tiene

$$V_o = \frac{Q_o}{\varepsilon_o A} X_o , \tag{186}$$

de donde

$$v = \frac{Q_o}{\varepsilon_o A} x , \tag{187}$$

y, por consiguiente,

$$v = \frac{V_o}{X_o} x . \tag{188}$$

Esta ecuación incluye el desplazamiento o elongación x, que puede expresarse como la integral de la velocidad o, en el dominio transformado de Laplace,

$$V(s) = \frac{V_o}{X_o s} U(s) . \tag{189}$$

Para completar el modelo electromecánico tengamos en cuenta que la fuerza entre dos placas con cargas $\pm Q$ es

$$F = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_o A} . \tag{190}$$

El signo (−) obedece a que la fuerza es opuesta al desplazamiento. Si expresamos la carga total como el valor de equilibrio Q_o superpuesto a un valor incremental q, resulta

$$F = -\frac{(Q_o + q)^2}{2\varepsilon_o A} \cong -\frac{Q_o{}^2 + 2Q_o q}{2\varepsilon_o A} . \tag{191}$$

La aproximación surge de despreciar q^2 por ser pequeño y de orden superior. Podemos retener sólo la componente incremental de la fuerza, resultando

$$f \cong -\frac{Q_o q}{\varepsilon_o A} = -\frac{V_o}{X_o} q . \tag{192}$$

Conviene expresar q en términos de la corriente i, lo cual puede hacerse integrando esta última. Resulta la ecuación linealizada siguiente

$$F(s) = -\frac{V_o}{X_o s} I(s) . \tag{193}$$

La constante de transducción es la misma en ambos casos, por lo que la potencia intercambiada es la misma del lado eléctrico y mecánico. Para demostrarlo es necesario pasar primero a la notación fasorial y aplicar la ecuación 39. De (189) y (193):

$$\dot{V} = \frac{V_o}{X_o j\omega}\dot{U}, \tag{194}$$

$$\dot{F} = -\frac{V_o}{X_o j\omega}\dot{I}. \tag{195}$$

Resulta

$$\dot{V}\,\dot{I}^* = \dot{F}^*\,\dot{U}. \tag{196}$$

Esto implica que las partes reales son iguales, por lo que la potencia eléctrica y la mecánica coinciden.

3.3. Transducción mecanoacústica

La transducción mecanoacústica es de naturaleza muy sencilla, dado que en realidad la energía en juego es mecánica en ambos casos. A modo de ejemplo consideremos un sistema en el que un pistón rígido oscila dentro de un tubo generando una onda sonora, como se muestra en la figura 42.

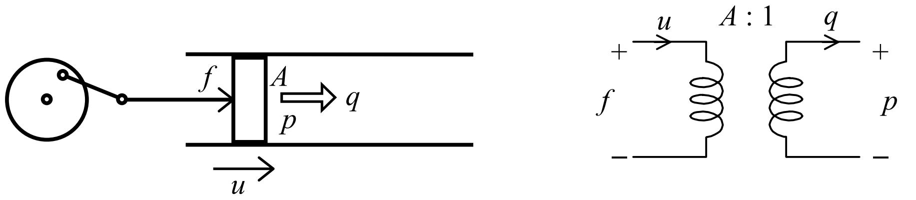


Figura 42. Un transductor mecanoacústico y su modelo como transformador.

La fuerza f aplicada al pistón es transmitida, por ser éste rígido, al aire dentro del tubo. Si el área del pistón es A, resulta que la presión ejercida por el pistón es

$$p = \frac{f}{A}, \tag{197}$$

Al mismo tiempo, el caudal q impulsado por el pistón al moverse con una velocidad u será

$$q = A\,u. \tag{198}$$

Estas ecuaciones determinan el proceso de transducción mecanoacústica. Podemos ver fácilmente que la potencia mecánica W_m entregada al pistón se convierte íntegramente en potencia acústica W_a, ya que

$$W_m = p\,q = \frac{f}{A} A\,u = f\,u = W_a \,. \tag{199}$$

Asimismo, el proceso es reversible, ya que si una onda acústica incide sobre el pistón con una presión *p* y un caudal *q*, se aplicará una fuerza sobre el pistón obtenida de (197) y el pistón se moverá con una velocidad *u* obtenida de (198).

4. Altavoz de bobina móvil

Aplicaremos ahora los conceptos anteriores al análisis del altavoz de radiación directa de bobina móvil o electrodinámico. Como se muestra en el corte esquemático de la figura 43, el altavoz está constituido por un diafragma cónico que se mueve solidario a una bobina inmersa en un campo magnético. Dicho campo se origina en un imán permanente toroidal cuyo circuito magnético se completa con un polo central y una pieza polar que lo rodea. La bobina se encuentra en el espacio de aire denominado *entrehierro*, sobre el cual existe un campo magnético *B* con dirección radial (figura 44b).

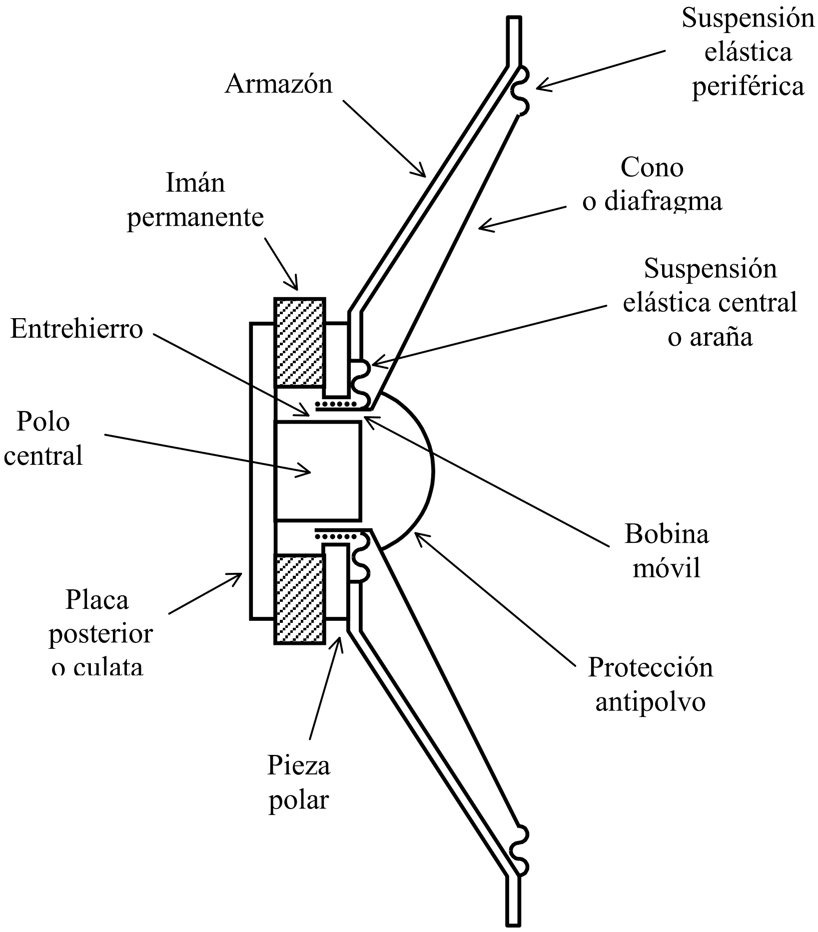
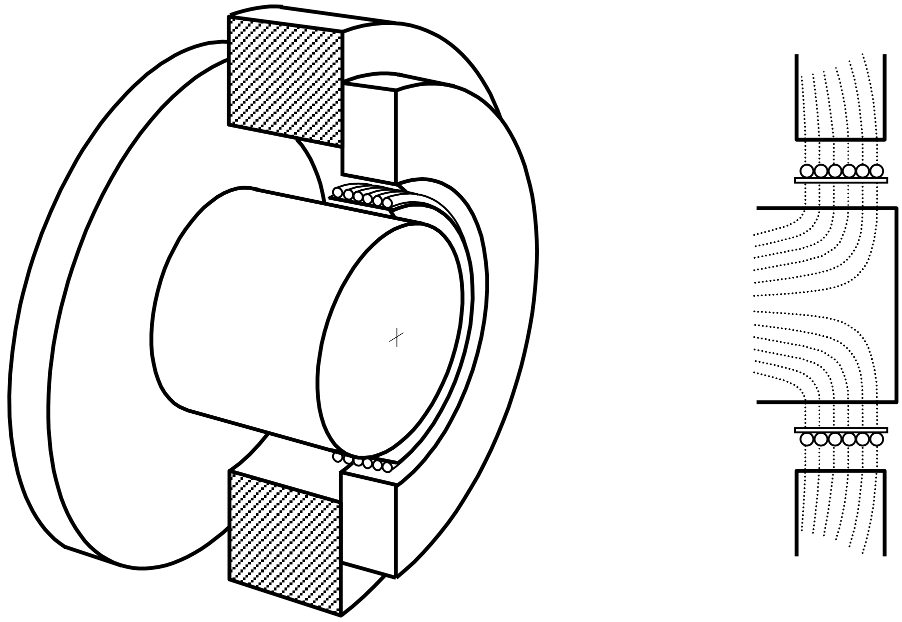


Figura 43. Corte transversal de un altavoz de bobina móvil de radiación directa típico, en donde se indican sus partes funcionalmente más importantes.

4.1. Circuito equivalente del altavoz

El altavoz descripto se comporta esencialmente como un motor lineal. Dado que el campo magnético atraviesa radialmente el entrehierro y que la bobina se mueve paralelamente a su eje, se dan las condiciones para la validez de las ecuaciones (179) y (180).

A efectos de obtener el circuito eléctrico equivalente tengamos en cuenta, en primer lugar, que del lado eléctrico la bobina posee una resistencia R_E y una inductancia L_E en serie con el primario del girador electromecánico. Del lado mecánico se encuentra la masa combinada del diafragma (cono) y la bobina, M_{MD}, la compliancia mecánica C_{MS} de las suspensiones y la resistencia mecánica R_{MS}, formada por las correspondientes a las suspensiones y la viscosidad del aire en el entrehierro. Estas impedancias están en serie, pues se mueven solidariamente a la misma velocidad u, [28] y están a su vez en serie con el secundario del girador electromecánico y con el primario del transformador mecanoacústico. Finalmente, del lado acústico, tenemos la impedancia acústica de radiación Z_{ar}. Si el altavoz se encuentra al aire por ambas caras del cono, aparecerá dos veces Z_{ar}, una para cada cara.[29] En la figura 45 se muestra el circuito equivalente completo, incluyendo el generador de señal e_g (típicamente un amplificador de audio de potencia) y su resistencia interna, R_g.



(a) (b)

Figura 44. (a) Detalle de la unidad motriz de un altavoz de bobina móvil. El imán permanente, la pieza polar y la bobina se han seccionado transversalmente. (b) Líneas de campo magnético en el entrehierro.

[28] Suponemos que el cono es rígido, lo cual es una aproximación válida a frecuencias moderadas.
[29] Esto sucede porque la fuerza que se opone al movimiento, dada por la presión multiplicada por el área del diafragma, aparece dos veces.

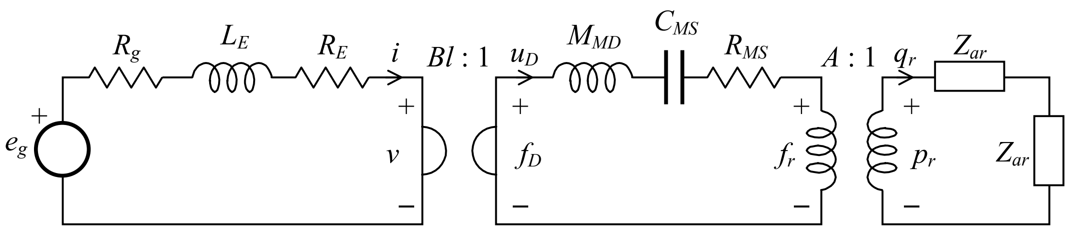


Figura 45. Circuito equivalente de un altavoz de bobina móvil conectado a una fuente de señal e_g con resistencia interna R_g.

Debe notarse que la presión sonora obtenida mediante este circuito es la presión sonora en la capa de aire adyacente al cono, no la presión sonora en un punto receptor alejado. Para obtener la presión sonora efectiva en un punto X a cierta distancia r del centro del cono (figura 46) suponiendo $r >> a$, donde a es el diámetro del cono es necesario aplicar la ecuación (159). El poder del cono Q_0, requerido en dicha ecuación, coincide con el caudal de radiación q_r obtenido del circuito de la figura 45.

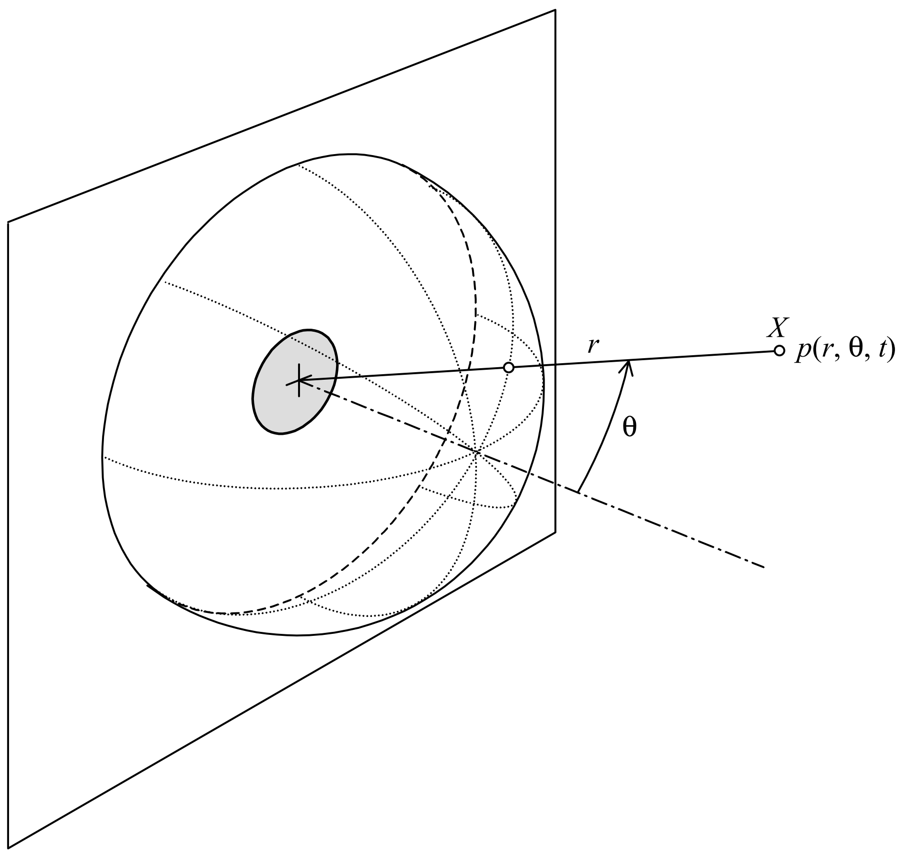


Figura 46.Presión producida en un punto X por un pistón circular rígido sobre una pared plana infinita.

Cuando la longitud de onda es mucho mayor que el diámetro del cono ($\lambda >> a$, es decir, $\omega a << c$) la presión sonora es casi omnidireccional (figura 32). Teniendo en cuenta que $2J_1(x)/x \to 1$ cuando $x \to 0$, de (159) resulta

$$p(r,\theta,t) \;\cong\; j\rho_o c \frac{Q_o}{2\pi r}\frac{\omega}{c}\, e^{j\omega(t\,-\,r/c)}. \tag{200}$$

Esta ecuación es casi idéntica a la (148), correspondiente a fuentes simples, salvo por el factor 2 en lugar del 4 en el denominador. Ello se debe a que en este caso el caudal Q_o se irradia en un semiespacio (el limitado por la pared plana infinita) en lugar de todo el espacio.

El valor eficaz de la presión sonora es, entonces,

$$P_{ef} \;=\; \rho_o f \frac{Q_{oef}}{r}. \tag{201}$$

donde Q_{oef} es el caudal eficaz impulsado por el cono, o *poder eficaz* del mismo.

Debido a que el caudal desplazado por el diafragma se puede calcular fácilmente a partir de su velocidad u_D y su área A, a veces se omite la transducción mecanoacústica del modelo, como se indica en la figura 47. En este caso se trabaja directamente con la impedancia *mecánica* de radiación, que está vinculada con la impedancia acústica de radiación a través del cuadrado del área:

$$Z_{mr} \;=\; \frac{\dot{F}}{\dot{U}} \;=\; \frac{\dot{P}A}{\dot{Q}/A} \;=\; A^2 Z_{ar}. \tag{202}$$

La velocidad del diafragma se calcula directamente a partir del circuito resultante.

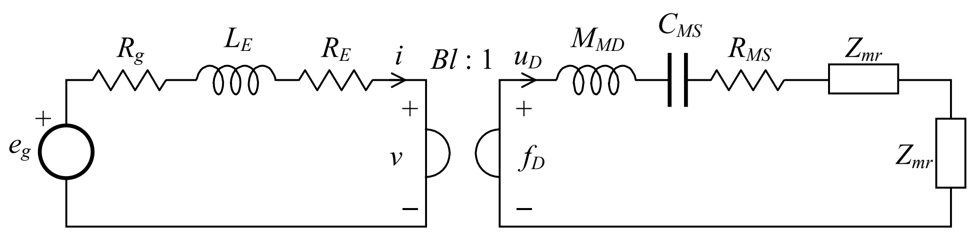


Figura 47. Circuito equivalente de un altavoz de bobina móvil en el que se ha omitido la transducción mecanoacústica, sustituyéndola por las impedancias mecánicas equivalentes de radiación.

También es posible obtener un circuito equivalente puramente eléctrico aplicando las propiedades del girador. Así, las impedancias mecánicas se transforman en admitancias eléctricas dividiendo por la relación del girador al cuadrado:

$$Y_e \;=\; \frac{\dot{I}}{\dot{V}} \;=\; \frac{\dot{F}}{Bl}\frac{1}{Bl\,\dot{U}} \;=\; \frac{Z_m}{(Bl)^2}, \tag{203}$$

o, equivalentemente, las impedancias mecánicas en serie se transforman en impedancias eléctricas en paralelo multiplicando su recíproco por la relación del girador al cuadrado:

$$Z_e \;=\; \frac{(Bl)^2}{Z_m}. \tag{204}$$

El resultado se muestra en la figura 48. En el caso de la impedancia acústica de radiación, su equivalente eléctrico será:

$$Z_{er} = \frac{(Bl)^2}{A^2 Z_{ar}}, \tag{205}$$

donde A es el área del cono.

Para calcular la velocidad del diafragma, necesaria para determinar su caudal (o poder de la fuente), basta dividir la tensión v por Bl:

$$u_D = \frac{v}{Bl}. \tag{206}$$

Debe observarse, no obstante, que v no es la tensión que se mediría directamente en bornes del altavoz ya que ésta incluye la caída en su resistencia R_E y en su inductancia L_E.

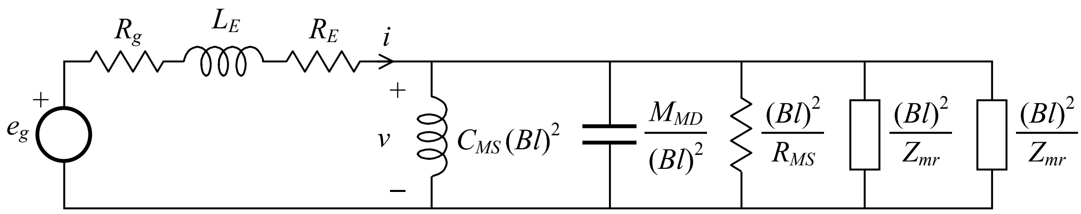


Figura 48. Circuito eléctrico equivalente de un altavoz de bobina móvil en el que se han transformado todas las impedancias al dominio eléctrico. La velocidad del cono puede obtenerse dividiendo la tensión v por Bl (ecuación (205)).

4.1.1. Ejemplo

Consideremos un parlante cuya bobina tiene 8 cm de diámetro y 32 vueltas de cobre de 0,16 mm de diámetro, cuyo cono tiene un diámetro efectivo de 26 cm y una masa de 8 g y cuya constante elástica es de 5600 N/m y su fricción 0,5 Ns/m. Supongamos, además, que la inducción magnética en el entrehierro es 2 Wb/m^2, que la inductancia de la bobina es 0,55 mHy y que la resistencia de la fuente de señal es de 0,12 Ω. Nos proponemos obtener el circuito eléctrico equivalente y sus propiedades básicas en baja frecuencia ($\omega \ll c/2a$).

Obtengamos primero la resistencia eléctrica de la bobina, R_E. La longitud total l y la sección S del alambre son

$$l = 32 \cdot \pi \cdot 0{,}08 \text{ m} = 8{,}04 \text{ m}.$$

$$S = \pi \cdot (0{,}00016 / 2)^2 \text{ m}^2 = 2{,}01 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$$

Se sabe, además, que la resistividad del cobre es $\rho_{Cu} = 1{,}72 \cdot 10^{-8}$ Ωm, de donde

$$R_E = l\cdot\rho_{Cu}/S = 8{,}04\cdot 1{,}72\cdot 10^{-8} / (2{,}01\cdot 10^{-8})\ \Omega = 6{,}88\ \Omega.$$

La resistencia eléctrica de la bobina y el generador de señal es, por consiguiente,

$$R_g + R_E = 6{,}88\ \Omega + 0{,}12\ \Omega = 7\ \Omega.$$

Dado que la densidad del cobre es $\delta_{Cu} = 8700\ \text{kg/m}^3$, la masa de la bobina es

$$M_b = l\cdot S\cdot\delta_{Cu} = 8{,}04\cdot 2{,}01\cdot 10^{-8}\cdot 8700\ \text{kg} = 0{,}00141\ \text{kg}$$

por lo cual la masa total es

$$M_{MD} = M_{cono} + M_b = 0{,}008\ \text{kg} + 0{,}00141\ \text{kg} = 0{,}00941\ \text{kg}.$$

En baja frecuencia, de (169),

$$Z_{ar} \cong \frac{1{,}2\cdot 345}{\pi\cdot 0{,}13^2}\left(\frac{0{,}13^2}{2\cdot 345^2}\omega^2 + j\frac{8\cdot 0{,}13}{3\cdot\pi\cdot 345}\omega\right) = 5{,}53\cdot 10^{-4}\omega^2 + j2{,}49\ \omega.$$

Multiplicamos por el área del cono al cuadrado para obtener la impedancia mecánica de radiación:

$$Z_{mr} = (\pi a^2)^2\, Z_{ar} = 1{,}56\cdot 10^{-6}\omega^2 + j\, 7\cdot 10^{-3}\ \omega.$$

La impedancia vista por el generador puede obtenerse a partir de la figura 48, donde $R_{MS} = \nu$ y $C_{MS} = 1/k$. Resulta:

$$Z_e = R_g + R_E + L_E j\omega + \frac{(B\,l)^2}{M_{MD}j\omega + \nu + \dfrac{k}{j\omega} + 2Z_{mr}}. \qquad (207)$$

Un parámetro de interés es la frecuencia de resonancia del altavoz. En frecuencias del orden de 100 Hz puede verse por cálculo directo que la inductancia de origen electromagnético de la bobina ofrece una reactancia despreciable frente a $R_g + R_E$, por lo cual puede despreciarse. La resonancia dependerá, por lo tanto, principalmente del último término, que puede escribirse como

$$\frac{(B\,l)^2}{0{,}00941 j\omega + 0{,}5 + \dfrac{5600}{j\omega} + 3{,}12\cdot 10^{-6}\omega^2 + 0{,}014 j\omega}.$$

Admitiendo, para simplificar los cálculos, que el término real en ω^2 tiene un efecto muy pequeño sobre la frecuencia de resonancia, se llega a que ésta es aproximadamente la que resulta de anular la parte imaginaria del denominador, es decir

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5600}{0{,}00941 + 0{,}014}} = 77{,}8\ \text{Hz}.$$

Podemos verificar que a esta frecuencia los términos en $j\omega$ y en $1/j\omega$ valen $\pm 11{,}4j$ kg/s mientras que el término en ω^2 vale 0,75 kg/s, por lo que la aproximación efectuada es válida. No obstante, la presencia de dicho término sí influye en la magnitud del pico de resonancia, ya que en este caso la comparación debe efectuarse contra el término constante, 0,5 kg/s. El factor de calidad de dicho pico será:

$$Q = \frac{11{,}4}{0{,}5 + 075} = 9{,}1 .$$

Luego de la resonancia, la impedancia alcanza una meseta bastante extensa en la cual la impedancia es casi resistiva

Referencias

Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A.: “Handbook of mathematical Functions”. Dover Publications. New York, 1972.

Beranek, Leo L.: “Acústica”. Editorial Hispanoamericana S. A. Buenos Aires (Arg.), 1961.

Beranek, Leo L.: “Acoustical Measurements”. American Institute of Physics. Cambridge, USA, 1993.

Davis, Don; Davis, Carolyn: “Sound System Engineering”. SAMS (Prentice Hall Computer Publishing). Carmel, Indiana, USA, 1994.

Fletcher, Harvey: “Speech and Hearing in Communication - ASA Edition”. American Institute of Physics (for the Acoustical Society of America). Woodbury, USA, 1995.

Haas, Helmut: “The influence of a single echo on the audibility of speech”. Journal of the Audio Engineering Society, Vol 20, No 2, March 1972, pp 146-159.

Ingard, Uno. “On the Theory and Design of Acoustic Resonators”. Journal of the Acoustical Society of America Vol 25 Nº 6, Nov 1956, pp 1037-1061

Kinsler, Lawrence; Frey, Austin; Coppens, Alan; Sanders, James: “Fundamentos de Acústica”. Editorial Limusa. México, 1995

Levine, H; Schwinger, J. “On the radiation of sound from an unflanged circular pipe”. Phys. Rev., 73: 383-406, 15 de febrero de 1948.

Miyara, Federico: “El AD536: Un conversor de verdadero valor eficaz en continua. Teoría de operación”. Publicación interna de la Escuela de Ingeniería Electrónica de la Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario. Rosario, Argentina, 1997. Disponible en el sitio de Internet http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3

Miyara, Federico: “Acústica y Sistemas de Sonido”. UNR Editora. Rosario, Argentina, 1999.

Miyara, Federico: “Introducción a la Acústica”. Publicación interna de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, U. N. R. Rosario (Arg.), 2003.

Miyara, Federico: “Introducción a la Psicoacústica”. Publicación interna de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, U. N. R. Rosario (Arg.), 2003.

Morse, Philip M.: “Vibration and Sound”. American Institute of Physics. USA, 1981.

Morse, Philip M., Ingard, K. Uno: “Theoretical Acoustics”. Princeton University Press. Princeton, NJ, USA, 1986.

Pierce, Allan D.: “Acoustics. An Introduction to its Physical Principles and Applications. Acoustical Society of America. Woodbury, NY, USA, 1991.

Sears, Francis: “Fundamentos de Física. I. Mecánica, calor y sonido”. Editorial Aguilar. Madrid, 1975.

Zwicker, E.; Feldtkeller, R.: “The Ear as a Communication Receiver”. American Institute of Physics (Acoustical Society of America) . USA, 1999.

Zwicker, E.; Fastl, H.: “Psychoacoustics. Facts and Models”. Springer. Berlin Heidelberg, 1999.